الوحدة الأولى

الجبر والعلاقات والدوال

(١) حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

• درجة المعادلة :

هى أعلى أُس فيها للمتغير

فمثلاً :

أ س + ب = ٠ ، أ ≠ ٠ هى معادلة من الدرجة الأولى

، أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠

هى معادلة من الدرجة الثانية (أو معادلة تربيعية) .

• طرق حل المعادلة التربيعية جبرياً

أولاً : طريقة التحليل

مثال (١)

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) س^{٢} + ٥ س − ٦ = ٠

(٢) ٢ س^{٢} + ٥ س + ٢ = ٠

(٣) س^{٢} − ٥ س = ٠

(٤) ٣ س^{٢} − ٤٨ = ٠

الحل

(١) ∵ س^{٢} + ٥ س − ٦ = ٠ ∴ (س − ٦) (س + ١) = ٠

إما س − ٦ = ٠ ⇐ س = ٦

أو س + ١ = ٠ ⇐ س = ١

∴ مجموعة الحل هى { ١ ، ٦ }

(٢) ∵ ٢ س^{٢} + ٥ س + ٢ = ٠

إ (٢ س + ١) (س + ٢) = ٠

إما ٢ س + ١ = ٠ ∴ ٢ س = −١ ⇐ س = $\frac{-١}{٢}$

أو س + ٢ = ٠ ⇐ س = −٢

∴ س ∈ { −٢ ، $\frac{-١}{٢}$ }

(٣) ∵ س^{٢} − ٥ س = ٠ ∴ س (س − ٥) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٥ ⇐ س ∈ { ٠ ، ٥ }

(٤) ∵ ٣ س^{٢} − ٤٨ = ٠ بالقسمة على ٣

∴ س^{٢} − ١٦ = ٠ ∴ (س − ٤) (س + ٤) = ٠

∴ س = ٤ أو س = −٤ ⇐ س ∈ { ٤ ، −٤ }

(تدريب)

أوجد مجموعة الحل فى لكل من المعادلات الآتية :

(١) س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ (٢) ٣ س^{٢} − ٥ س = ٢

(٣) ٥ س^{٣} − ١٥ س = ٠ (٤) ٤ س^{٢} − ٩ = ٠

• ملاحظات هامة :

فى المعادلة : (س − ل) (س − م) = ٠ يكون :

(١) ل ، م هما جذرى المعادلة

(٢) (س − ل) هو أحد عوامل المقدار :

أ س^{٢} + ب س + جـ وهذا يعنى أن د (ل) = ٠

أى أن : أ ل^{٢} + ب ل + جـ = ٠

مثال (٢)

إذا كانت س = ٣ أحد جذرى المعادلة : أ س^{٢} − ٥ س + أ = ٠

فأوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر .

الحل

∵ س = ٣ جذر للمعادلة ∴ د (٣) = ٠

∴ أ (٣)^{٢} − ٥ (٣) + أ = ٠ ∴ ١٠ أ = ١٥ ⇐ أ = ١,٥

• القانون العام لحل المعادلة التربيعية :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هو

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

ونلجأ لإستخدام هذا القانون إذا تعذر علينا التحليل

مثال (٣)

حل المعادلة الآتية : س^{٢} + ٣ س = −١ فى ح مقرباً الناتج لرقمين عشريين .

الحل

نجعل المعادلة صفرية : س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ١

∴ $س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ $س_{١} = \frac{-٣ + \sqrt{٥}}{٢} = -٠,٣٨$

، $س_{٢} = \frac{-٣ - \sqrt{٥}}{٢} = -٢,٦٢$

(تدريب)

حل كل من المعادلات الآتية فى ع :

(١) ٢ س^{٢} – ٥ س + ١ = ٠ (٢) س^{٢} – ٤ س + ٥ = ٠

حل المعادلة التربيعية بيانياً

• خطوات الحل :

(١) نحدد رأس المنحنى من العلاقة :

الإحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢ أ}$

(٢) يفضل استخدام الآلة الحاسبة فى عمل جدول القيم .

(٣) نختار الفترة المناسبة للرسم ما لم يذكرها بالسؤال .

• ملاحظة هامة :

تحقيق الحل جبرياً ليس هو حل المعادلة جبرياً ولكنه مجرد التعويض بقيمة كل من جذرى المعادلة بالطرف الأيمن لها لينتج لنا قيمة الطرف الأيسر .

مثال (٤)

حل المعادلة : س^{٢} + س – ٦ = ٠ بيانياً ثم حقق الناتج جبرياً .

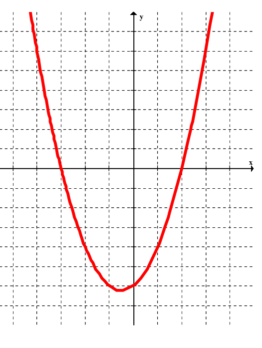
الحل

س لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢ أ}$ = $\frac{-١}{٢ \times ١}$ = $\frac{-١}{٢}$

د ($\frac{-١}{٢}$) = ($\frac{-١}{٢}$)^{٢} + ($\frac{-١}{٢}$) – ٦ = – ٦,٢٥

∴ رأس المنحنى = (– ٠,٥ ، – ٦,٢٥)

س	...	٣	٢	١	– ٠,٥	– ١	– ٢	– ٣	– ٤
ص	...	٦	٠	– ٤	– ٦,٢٥	– ٦	– ٤	٠	٦



من الرسم نجد أن منحنى الدالة يقطع محور السينات عند س = ٢ ، س = – ٣

∴ مجموعة الحل = { ٢ ، – ٣ }

التحقيق الجبرى :

عندما س = ٢ :

الطرف الأيمن = (٢)^{٢} + ٢ – ٦ = ٠ = الطرف الأيسر

عندما س = – ٣ :

الطرف الأيمن = (–٣)^{٢} – ٣ – ٦ = ٠ = الطرف الأيسر

• ملاحظات هامة :

من الرسم البيانى للدالة لإيجاد مجموعة حل د (س) = ٠ فى ع :

(١) إذا قطع المنحنى محور السينات فى نقطتين فإن مجموعة الحل تتكون من جذرين هما قيمتى س .

(٢) إذا قطع المنحنى محور السينات فى نقطة واحدة فإن مجموعة الحل تتكون من عنصر واحد هو قيمة س عند نقطة التقاطع ويكون للمعادلة جذرين متساويين .

(٣) إذا لم يقطع المنحنى محور السينات فإن مجموعة الحل = ∅

تمارين (١) على حل المعادلة التربيعية بيانياً

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) المعادلة (س – ٣) (٢ س + ٥) = ٠ من الدرجة ....

(أ) الأولى (ب) الثانية (ج) الثالثة (د) الرابعة

(٢) المعادلة س (س + ٢) = ٠ من الدرجة ....

(أ) الأولى (ب) الثانية (ج) الثالثة (د) الرابعة

(٣) المعادلة س (س + ٣) (٥ – س) = ٢ من الدرجة ......

(أ) الأولى (ب) الثانية (ج) الثالثة (د) الرابعة

(٤) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} = س فى ع هى ....

(أ) { ٠ ، ١ } (ب) { – ١ ، ١ }

(ج) { ١ } (د) { ٠ }

(٥) مجموعة حل المعادلة س^{٢} + س + ٤ = ٠ فى ع هى ....

(أ) { ٤ } (ب) { ٢ } (ج) { ٠ } (د) ∅

(٦) مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٣ = ٠ فى ع هى ....

(أ) { $\sqrt{٣}$ } (ب) { – $\sqrt{٣}$ }

(ج) ∅ (د) { – ٣ }

(٧) مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٤ س = – ٤ فى ع هى ......

(أ) { ٢ } (ب) { – ٢ ، ٢ }

(ج) { – ٢ } (د) ∅

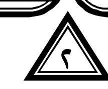
(٨) فى الشكل المجاور :

مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

فى ع هى ....

(أ) { – ٢ } (ب) { ٤ }

(ج) ∅ (د) { – ٢ ، ٤ }





(٩) فى الشكل المجاور :
مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠
فى ع هى ....

(أ) {−٢}　(ب) {١}
(ج) ∅　(د) {٢}

(١٠) فى الشكل المجاور :
مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠
فى ع هى ....

(أ) {١}　(ب) {٣}
(ج) {−٣}　(د) {١ ، −٣}

• أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ع :

(أ) $س^{٢} − ٨١ = ٠$　(ب) $س^{٢} + ٣ س = ٠$

(ج) $(س + ٢)^{٢} = ٠$　(د) $س^{٢} + ٨١ = ٠$

(هـ) س (س + ١) (س − ٣) = ٠

(١٢) باستخدام القانون العام حل المعادلات الآتية فى ع
مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد :

(أ) $س^{٢} + ٦ س + ٨ = ٠$

(ب) $٢ س^{٢} + ٣ س − ٤ = ٠$

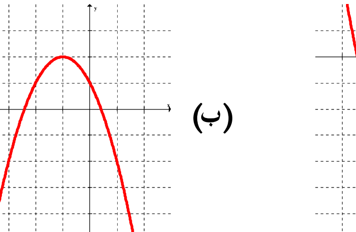
(ج) $٥ س^{٢} − ٣ س − ١ = ٠$

• **ملاحظة هامة :**

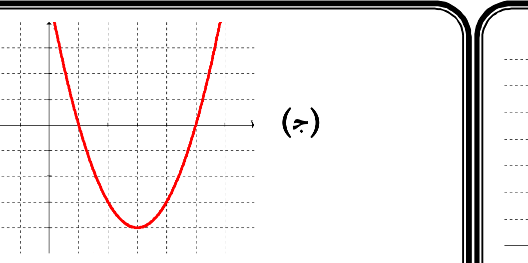
كيف نوجد قاعدة دالة تربيعية بمعلومية رسم منحناها ؟
نحدد رأس المنحنى وليكن (أ ، ب) :
إذا كان المنحنى يُفتح لأعلى : $(س − أ)^{٢} + ب$
إذا كان المنحنى يُفتح لأسفل : $ب − (س − أ)^{٢}$

(١٣) يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية فى متغير واحد . أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال :

(أ)　(ب)



(ج)



(١٤) أوجد مجموعة حل المعادلة : $٢ س^{٢} = ٣ − ٥ س$ بيانياً
وحقق الناتج جبرياً .

(٢) الأعداد المركبة

• **العدد التخيلى (ت) :**

يعرف العدد التخيلى بأنه العدد الذى مربعه يساوى (−١)
ونرمز له بالرمز (ت) . أى أن : $ت^{٢} = −١ \Leftarrow ت = \sqrt{−١}$

• **القوى الصحيحة للعدد (ت) :**

ت	$ت^{٢} = −١$
$ت^{٣} = ت^{٢} × ت = −ت$	$ت^{٤} = ت^{٢} × ت^{٢} = ١$

• **تبسيط العدد التخيلى (ت) الذى أسه أكبر من ٤ :**

$$ت^{٤ ن + م} = ت^{م}$$

أى نقسم الأُس على ٤ وباقى القسمة هو الأُس الجديد
فمثلاً : $ت^{١٧} = ت$ ، $ت^{١٨} = ت^{٢} = −١$
، $ت^{١٩} = ت^{٣} = −ت$ ، $ت^{٢٠} = ت^{صفر} = ١$

• **ملاحظة هامة :**

لتبسيط الأُس السالب نضيف للأُس أقرب عدد يقبل القسمة على ٤ ويكون أكبر من الأُس السالب عددياً .
فمثلاً : $ت^{−١٥} = ت^{١٦ − ١٥} = ت$
، $ت^{−٢٢} = ت^{٢٤ − ٢٢} = ت^{٢} = −١$
، $ت^{−٢٥} = ت^{٢٨ − ٢٥} = ت^{٣} = −ت$
لاحظ أن : $ت^{−٣٦} = ١$ (لأن −٣٦ يقبل القسمة على ٤)

• **العدد المركب (ع) :**

يمكن كتابته على الصورة : ع = أ + ب ت حيث أ ، ب عددان حقيقيان .
أى أن : العدد المركب يتكون من جزء حقيقى وجزء تخيلى .
فمثلاً : ٣ + ٤ ت ، ٥ − $\sqrt{٣}$ ت أعداد مركبة
كذلك : ٧ عدد مركب جزئه التخيلى = صفر

، ٥ ت ، ت كل منهما عدد مركب جزئه الحقيقى = صفر

⇐ كل عدد حقيقى هو عدد مركب وليس كل عدد مركب هو عدد حقيقى . كذلك كل عدد تخيلى هو عدد مركب وليس كل عدد مركب هو عدد تخيلى .

مثال (١)

حل المعادلة ٤ س^٢ + ١٠٠ = ٧٥ حيث س عدد مركب

الحل

∵ ٤ س^٢ + ١٠٠ = ٧٥ ∴ ٤ س^٢ = ٧٥ – ١٠٠

∴ ٤ س^٢ = – ٢٥ ∴ س^٢ = $\frac{-٢٥}{٤}$ ∴ س = $\sqrt{\frac{-٢٥}{٤}}$

∴ س = $\sqrt{\frac{٢٥}{٤}}$ ت ⇐ س = $\frac{٥}{٢}$ ت

(تدريب)

حل المعادلة : ٣ س^٢ + ٢٧ = ٠

- **تساوى عددين مركبين :**

إذا كان : ع$_١$ = ٢ + ب ت ، ع$_٢$ = س + ص ت

، وكان ع$_١$ = ع$_٢$ فإن : ٢ = س ، ب = ص

مثال (٢)

أوجد قيمتى س ، ص فى كل من المعادلتين الآتيتين حيث س ، ص ∈ ح ، ت^٢ = – ١

(١) ٢ س – ٣ + (٣ ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

(٢) ٢ س – ص + (س – ٢ ص) ت = ٥ + ت

الحل

(١) ٢ س – ٣ = ٧ ⇐ ٢ س = ١٠ ⇐ س = ٥

٣ ص + ١ = ١٠ ⇐ ٣ ص = ٩ ⇐ ص = ٣

(٢) ٢ س – ص = ٥ .... (١) ، س – ٢ ص = ١ .... (٢)

من (٢) س = ١ + ٢ ص .... (٣) عوض فى (١)

∴ ٢ (١ + ٢ ص) – ص = ٥ ⇐ ٢ + ٤ ص – ص = ٥

⇐ ٣ ص = ٣ ومنها ص = ١

عوض فى (٣) س = ١ + ٢ × ١ = ٣

ويفضل استخدام الآلة الحاسبة لحل المعادلتين كما يلى :

بعد كتابة كلا المعادلتين على الصورة : ٢ س + ب ص = ج

(١) نضغط على التتابع : MODE 5 1

(٢) ندخل المعاملات لكلا المعادلتين ٢ ، ب ، ج بكتابة كل عدد ثم الضغط على = بعده .

(٣) نضغط = فتظهر قيمة س ثم نضغط مرة أخرى = فتظهر قيمة ص .

(٤) للخروج من النظام والعودة للنظام الأساسى نضغط : MODE 1

- **العمليات على الأعداد المركبة :**

أولاً : جمع (أو طرح) عددين مركبين :

نجمع (نطرح) الجزئين الحقيقين معاً ونجمع (نطرح) الجزئين التخيلين معاً

ثانياً : ضرب عددين مركبين :

كما سبق وتعلمنا فى فك الأقواس .

مثال (٣)

أوجد فى أبسط صورة ناتج كل مما يأتى :

(١) (١٢ – ٥ ت) – (٧ – ٩ ت)

(٢) (٤ – ٣ ت) (٤ + ٣ ت)

(٣) (٥ – ٦ ت) (٣ + ٢ ت)

الحل

(١) (١٢ – ٥ ت) – (٧ – ٩ ت)

= (١٢ – ٧) + (–٥ + ٩) ت = ٥ + ٤ ت

(٢) (٤ – ٣ ت) (٤ + ٣ ت) = (٤)^٢ – (٣ ت)^٢

= ١٦ – ٩ ت^٢ = ١٦ – ٩ × (–١) = ١٦ + ٩ = ٢٥

(٣) (٥ – ٦ ت) (٣ + ٢ ت)

= ٥ (٣ + ٢ ت) – ٦ ت (٣ + ٢ ت)

= ١٥ + ١٠ ت – ١٨ ت – ١٢ ت^٢

= ١٥ + ١٠ ت – ١٨ ت + ١٢

= (١٥ + ١٢) + (١٠ – ١٨) ت = ٢٧ – ٨ ت

(تدريب)

أكمل ما يأتى :

(١) (٣ + ٢ ت) – (١ – ت) = ...

(٢) (٣ + ٢ ت) + (١ – ت) = ...

(٣) (٣ + ٢ت) (١ − ت) = ...

• العددان المترافقان :

العدد ع = أ + ب ت يكون مرافقه $\bar{ع}$ = أ − ب ت

أى أن مرافق العدد المركب هو نفس العدد مع تغيير إشارة الجزء التخيلى فقط .

• ملاحظات هامة : □

(١) ع + $\bar{ع}$ = عدد حقيقى

(٢) ع × $\bar{ع}$ = عدد حقيقى = مجموع مربعين □

(٣) قبل أن نتعامل مع أى كسر مقامه عدد مركب غير حقيقى

لابد أولاً من ضرب هذا الكسر × $\frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}}$.

مثال (٤)

أوجد فى أبسط صورة :

(١) $\frac{\text{٤ − ٦ت}}{\text{٢ت}}$ (٢) $\frac{\text{٢٦}}{\text{٣ − ٢ت}}$ (٣) $\frac{\text{٣ − ت}}{\text{٢ − ت}}$ (٤) $\frac{\text{٣ + ٤ت}}{\text{٥ − ٢ت}}$

الحل

(١) $\frac{\text{٤ − ٦ت}}{\text{٢ت}} = \frac{\text{٤ − ٦ت}}{\text{٢ت}} \times \frac{\text{٢ت}}{\text{٢ت}} = \frac{\text{٨ت − ١٢ت}^{٢}}{\text{٤ت}^{٢}}$

$= \frac{\text{٨ت + ١٢}}{\text{− ٤}}$ = − ٢ت − ٣ = − ٣ − ٢ت

(٢) $\frac{\text{٢٦}}{\text{٣ − ٢ت}} = \frac{\text{٢٦}}{\text{٣ − ٢ت}} \times \frac{\text{٣ + ٢ت}}{\text{٣ + ٢ت}} = \frac{\text{٧٨ + ٥٢ت}}{\text{٩ + ٤}}$

$= \frac{\text{٧٨ + ٥٢ت}}{\text{١٣}}$ = ٦ + ٤ت

(٣) $\frac{\text{٣ − ت}}{\text{٢ − ت}} = \frac{\text{٣ − ت}}{\text{٢ − ت}} \times \frac{\text{٢ + ت}}{\text{٢ + ت}} = \frac{\text{٦ + ٣ت − ٢ت − ت}^{٢}}{\text{٤ + ١}}$

$= \frac{\text{٧ + ت}}{\text{٥}} = \frac{\text{٧}}{\text{٥}} + \frac{\text{١}}{\text{٥}}$ ت

(٤) $\frac{\text{٣ + ٤ت}}{\text{٥ − ٢ت}} = \frac{\text{٣ + ٤ت}}{\text{٥ − ٢ت}} \times \frac{\text{٥ + ٢ت}}{\text{٥ + ٢ت}}$

$= \frac{\text{١٥ + ٦ت + ٢٠ت + ٨ت}^{٢}}{\text{٢٥ + ٤}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢٩}} + \frac{\text{٢٦}}{\text{٢٩}}$ ت

مثال (٥)

أوجد فى أبسط صورة : $(\text{١ − ت})^{١٠}$

الحل

$(\text{١ − ت})^{١٠} = [(\text{١ − ت})^{٢}]^{٥} = (\text{١ − ٢ت − ١})^{٥}$

$= (\text{− ٢ت})^{٥} = \text{− ٣٢ ت}^{٥}$ = − ٣٢ ت

(تدريب)

ضع فى أبسط صورة :

(١) $\frac{\text{٣ − ٦ت}}{\text{٣ت}}$ (٢) $\frac{\text{ت − ١}}{\text{ت + ٢}}$ (٣) $(\text{١ + ت})^{٦}$

تمارين (٢) على الأعداد المركبة

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) $\text{ت}^{٤٣}$ = ...

(أ) ت (ب) − ١ (ج) − ت (د) ١

(٢) $\text{ت}^{-٤٣}$ = ...

(أ) ت (ب) − ١ (ج) − ت (د) ١

(٣) أبسط صورة للعدد المركب $\frac{\text{٣ − ت}}{\text{ت}}$ هى ....

(أ) ١ + ت (ب) − ١ + ت

(ج) ١ − ت (د) − ١ − ت

(٤) مرافق العدد المركب (ت − ٣) هو ....

(أ) ٣ − ت (ب) − (٣ + ت)

(ج) ت + ٣ (د) ت − ٣

(٥) (أ + ب ت) + (أ − ب ت) = ...

حيث : أ ، ب ∈ ح ، ت² = − ١

(أ) عدد حقيقى (ب) عدد مركب

(ج) عدد تخيلى (د) كل ما سبق

(٦) (أ + ب ت) (أ − ب ت) = ...

حيث : أ ، ب ∈ ح ، ت² = − ١

(أ) عدد حقيقى (ب) عدد مركب

(ج) عدد تخيلى (د) كل ما سبق

• أجب عن الأسئلة الآتية :

(٥) ضع فى أبسط صورة حيث ن ∈ ص ، ت² = − ١ :

(أ) $\text{ت}^{-٤٥}$ (ب) $\text{ت}^{\text{٤ن + ٣}}$ (ج) $\text{ت}^{\text{٤ن − ١}}$

(٦) ضع فى أبسط صورة :

(أ) $\sqrt{\text{− ٣}} \times \sqrt{\text{− ٢٧}}$ (ب) ٣ ت (٤ $\text{ت}^{٣}$)

(٧) ضع فى صورة أ + ب ت المقدار :

$(\text{١ + ٢ت}^{٧})(\text{٢ + ٣ت}^{٩} + \text{٤ت}^{١٠})$

(٨) ضع فى صورة ٢ + ب ت :

(٢) $\frac{٢}{١+ت}$ (ب) $\frac{(٣+ت)(٣-ت)}{٣-٤ت}$

(٩) حل كل من المعادلات الآتية حيث س عدد مركب :

(٢) ٢ $س^٢$ + ١٨ = ٠ (ب) ٤ $ص^٢$ + ٢٠ = ٠

(٣) تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

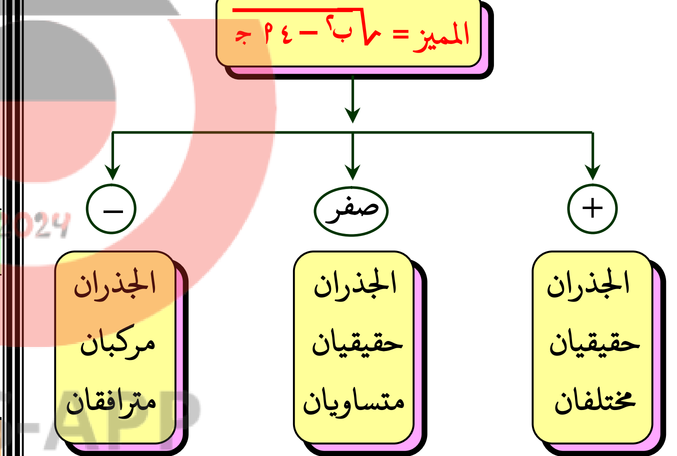
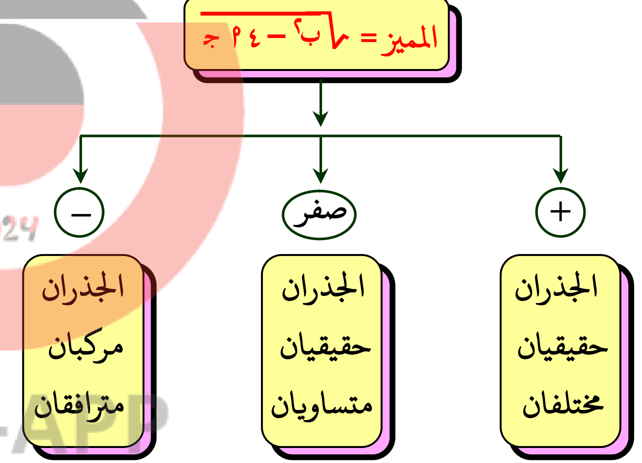
• **المميز :**

القانون العام لحل المعادلة التربيعية : ٢ $س^٢$ + ب س + جـ = ٠

حيث ٢ ≠ ٠ ، ٢ ، ب ، جـ ∈ ح هو :

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ٢ جـ}}{٢ ٢}$

يسمى المقدار $ب^٢ - ٤ ٢ جـ$ مميز المعادلة التربيعية حيث :

مثال (١)

عيّن نوع كل جذرى كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

(١) ٦ $س^٢$ = ١٩ س − ١٥ (٢) ١٢ س − ٤ $س^٢$ = ٩

(٣) س (س − ٢) + ٥ = ٠

الحل

(١) ٦ $س^٢$ − ١٩ س + ١٥ = ٠

المميز = $ب^٢$ − ٤ ٢ جـ = $(-١٩)^٢$ − ٤ × ٦ × ١٥

= ١ (قيمة موجبة) ⇐ الجذران حقيقيان مختلفان

(٢) ٤ $س^٢$ − ١٢ س + ٩ = ٠

المميز = $ب^٢$ − ٤ ٢ جـ = $(-١٢)^٢$ − ٤ × ٤ × ٩ = صفر

⇐ الجذران حقيقيان متساويان

(٣) $س^٢$ − ٢ س + ٥ = ٠

المميز = $ب^٢$ − ٤ ٢ جـ = $(-٢)^٢$ − ٤ × ١ × ٥

= −١٦ (قيمة سالبة)

⇐ الجذران مركبان مترافقان

مثال (٢)

أثبت أن جذرى المعادلة : ٣ $س^٢$ − ٢ س + ١ = ٠ مركبان ، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين .

الحل

المميز = $ب^٢$ − ٤ ٢ جـ = $(-٢)^٢$ − ٤ × ٣ × ١

= −٨ (قيمة سالبة)

⇐ الجذران مركبان مترافقان

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢ ٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{-٨}}{٢ × ٣} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٢} ت}{٦}$

$= \frac{١ \pm \sqrt{٢} ت}{٣}$

س ∈ { $\frac{١}{٣} + \frac{\sqrt{٢}}{٣}$ ت ، $\frac{١}{٣} - \frac{\sqrt{٢}}{٣}$ ت }

(تدريب)

إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢$ − ٢ ك س + ٧ ك − ٦ س + ٩ = ٠ متساويين ، فأوجد قيم ك الحقيقية ، ثم أوجد الجذرين .

تمارين (٣) على تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة $س^٢$ − ٤ س + ك = ٠ متساويين فإن ك = ...

(٢) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (ء) ١٦

(٢) إذا كان جذرا المعادلة $س^٢$ − ٢ س + م = ٠ حقيقيين مختلفين فإن م ....

(٢) = ١ (ب) > ١ (جـ) < ١ (ء) = ٤

(٣) إذا كان جذرا المعادلة ل $س^٢$ − ١٢ س + ٩ = ٠ مركبين غير حقيقيين فإن ل ....

(٢) < ٤ (ب) > ٤ (جـ) = ١ (ء) = ٤



• **أجب عن الأسئلة الآتية :**

(٤) حدد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

(أ) س^{٢} − ٢ س + ٥ = ٠

(ب) س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ = ٠

(جـ) ٢ س^{٢} − ٦ س = ٥

(د) (س − ١١) − س (س − ٦) = ٠

(٥) إذا كان جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} + ٤ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين فما قيمة ك ؟

(٦) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ٣ س + ٢ + $\frac{١}{ك}$ = ٠ متساويين فأوجد قيمة ك .

(٧) إذا كان جذرا المعادلة : ك س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠ مركبين غير حقيقيين فأوجد قيمة ك .

(٨) إذا كان جذرا المعادلة :
س^{٢} + ٢ (ك − ١) س + (٢ك + ١) = ٠ متساويين فأوجد قيم ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

(٩) حل المعادلة : ٣٦ س^{٢} − ٤٨ س + ٢٥ = ٠ حيث س ∈ مجموعة الأعداد المركبة.

(٤) العلاقة بين جذرى المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

• **مجموع الجذرين وحاصل ضربهما**

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية :
أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ فإن :

مجموع الجذرين (ل + م) = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$

، حاصل ضرب الجذرين (ل م) = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$

مثال (١)

إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + ب س − ٥ = ٠ هو $\frac{-٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة .

الحل

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-٣}{٢}$ ∴ $\frac{-ب}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$ ⇐ ب = ٣

∴ المعادلة هى : ٢ س^{٢} + ٣ س − ٥ = ٠

∴ (٢ س + ٥)(س − ١) = ٠ ⇐ س = − ٥ أ، س = ١

مثال (٢)

أوجد قيمة جـ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة :
٣ س^{٢} + ١٠ س − جـ = ٠ هو $\frac{-٨}{٣}$ ثم حل المعادلة .

الحل

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{-٨}{٣}$ ∴ $\frac{-جـ}{٣}$ = $\frac{-٨}{٣}$

⇐ جـ = ٨ وتصبح المعادلة هى : ٣ س^{٢} + ١٠ س − ٨ = ٠

∴ (٣ س − ٢)(س + ٤) = ٠ ⇐ س = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = −٤

(تدريب)

إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} − ٣ س + ك = ٠ يساوى ١ فأوجد قيمة ك .

مثال (٣)

إذا كان (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة :
س^{٢} − ٤ س + ب = ٠ ، ب ∈ ح فأوجد :
(أ) الجذر الآخر (ب) قيمة ب .

الحل

(أ) ∵ (٢ + ت) هو أحد جذرى المعادلة

∴ الجذر الآخر هو ٢ − ت (لأن الجذرين مركبان مترافقان)

(ب) ∵ حاصل ضرب الجذرين = ب

∴ (٢ + ت)(٢ − ت) = ب ∴ ٤ + ١ = ب ⇐ ب = ٥

(تدريب)

إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة :
س^{٢} − ٢ س + أ = ٠ ، أ ∈ ح فأوجد :
(أ) الجذر الآخر (ب) قيمة أ .

• **ملاحظات هامة :**

(١) إذا كان أحد الجذرين هو المعكوس الجمعى للآخر فإن : ب = صفر

(٢) إذا كان أحد الجذرين هو المعكوس الضربى للآخر : أ = جـ

مثال (٤)

أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذرى المعادلة :

$س^{٢}$ + (ك – ٣) س – ٩ = ٠ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر

الحل

∵ أحد الجذرين هو المعكوس الجمعى للآخر ⇐ ب = صفر

∴ ك + ٣ = ٠ ⇐ ك = – ٣

مثال (٥)

أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذرى المعادلة :

٢ $س^{٢}$ + س – ٩ + ك = ٠ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر .

الحل

∵ أحد الجذرين هو المعكوس الضربى للآخر ⇐ جـ = أ

∴ – ٩ + ك = ٢ ⇐ ك = ١١

(تدريب)

إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ $س^{٢}$ + ك = ١٢ س

يساوى $\frac{٧}{٢}$ فأوجد قيمة ك .

• تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها :

المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م هى :

$س^{٢}$ – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

أى : $س^{٢}$ – (ل + م) س + ل م = ٠

أو : (س – ل) (س – م) = صفر

مثال (٦)

كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها : $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ – ت}$

الحل

تذكر قبل أن نتعامل مع الكسور التى مقامها أعداد مركبة لابد من الضرب × مرافق المقام .

$\frac{٣}{ت} = \frac{٣}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{٣ت}{ت^{٢}} = \frac{٣ت}{–١} = – ٣ت$

، $\frac{٣ + ٣ت}{١ – ت} = \frac{٣ + ٣ت}{١ – ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = \frac{٦ت}{١ + ١} = ٣ت$

∴ مجموع الجذرين = – ٣ت + ٣ت = صفر

، حاصل ضرب الجذرين = – ٣ت × ٣ت = – ٩ $ت^{٢}$ = ٩

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^{٢}$ + ٩ = ٠

(تدريب)

كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها : ٣ ، – ٥

• متطابقات هامة : ☐

(١) $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م$

(٢) $(ل – م)^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٤ ل م$

(٣) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م}$

(٤) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م} = \frac{(ل + م)^{٢} – ٢ ل م}{ل م}$

(ملاحظة : توجد علاقات أخرى ولكن يكتفى بالمذكور)

مثال (٧)

إذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة : ٢ $س^{٢}$ – ٣ س – ١ = ٠

فأوجد قيمة كل من المقادير الآتية :

(١) ل + م ، ل م

(٢) $ل^{٢} + م^{٢}$

(٣) ل – م

(٤) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

(٥) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}$

الحل

(١) ∵ ٢ $س^{٢}$ – ٣ س – ١ = ٠ ، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{–ب}{أ}$

∴ ل + م = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ ل م = $\frac{–١}{٢}$

(٢) $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م = (\frac{٣}{٢})^{٢} – ٢ (\frac{–١}{٢})$

$= \frac{١٣}{٤}$

(٣) $(ل – م)^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٤ ل م = (\frac{٣}{٢})^{٢} – ٤ (\frac{–١}{٢})$

$= \frac{١٧}{٤}$ ∴ ل – م = $\sqrt{\frac{١٧}{٤}} = \frac{١}{٢} \sqrt{١٧}$

(٤) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{–١}{٢}} = – ٣$

(٥) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م} = \frac{\frac{١٣}{٤}}{\frac{–١}{٢}} = \frac{–١٣}{٢}$

(تدريب)

إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : س٢ + ٣ س – ٥ = ٠

أوجد قيمة : (١) ل٢ + م٢ (٢) ل – م

• تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى :

خطوات الحل :

(١) من المعادلة المعطاة :

نوجد ل + م ، ل م

(٢) للمعادلة المطلوبة :

نوجد مجموع الجذرين ، حاصل ضربهما

(٣) نكوّن المعادلة :

س٢ – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

مثال (٨)

إذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة : س٢ – ٧ س + ٥ = ٠

كوّن المعادلة التى جذراها : ل٢ ، م٢

الحل

المعادلة المعطاة : ل + م = ٧ ، ل م = ٥

المعادلة المطلوبة :

مجموع الجذرين = ل٢ + م٢ = (ل + م)٢ – ٢ ل م

= ٤٩ – ١٠ = ٣٩

، حاصل ضرب الجذرين = ل٢ م٢ = (ل م)٢ = ٢٥

∴ المعادلة هى : س٢ – ٣٩ س + ٢٥ = ٠

مثال (٩)

إذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة : س٢ – ٣ س + ٦ = ٠

كوّن المعادلة التى جذراها : ل – ٢ ، م – ٢

الحل

المعادلة المعطاة : ل + م = ٣ ، ل م = – ٤

المعادلة المطلوبة :

مجموع الجذرين = ل – ٢ + م + ٢ = ل + م = ٣

حاصل ضرب الجذرين = (ل – ٢)(م + ٢)

= ل م + ٢ ل – ٢ م – ٤ = ل م + ٢ (ل – م) – ٤ .... (١)

(ل – م)٢ = (ل + م)٢ – ٤ ل م = ٩ – ٤ (– ٤)

= ٩ + ١٦ = ٢٥ ∴ ل – م = √٢٥ = ٥

بالتعويض فى (١)

∴ مجموع الجذرين = – ٤ + ٢ × ٥ – ٤ = ٢

∴ المعادلة هى : س٢ – ٣ س + ٢ = ٠

(تدريب)

إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : س٢ – ٥ س + ٢ = ٠

كوّن المعادلة التى جذراها : ل – ٣ ، م – ٣ .

تمارين (٤) على العلاقة بين الجذرين وتكوين المعادلة

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س٢ – ٣ س + ﺟ = ٠ ضعف الآخر فإن ﺟ تساوى ....

(أ) – ٤ (ب) – ٢ (ﺟ) ٢ (د) ٤

(٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ س٢ – ٣ س + ٢ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ﺟ) ٢ (د) ٣

(٣) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س٢ – (ب – ٣) س + ٥ = ٠ معكوساً جمعياً للآخر فإن ب = ...

(أ) – ٥ (ب) – ٣ (ﺟ) ٣ (د) ٥

• أكمل ما يأتى :

(٤) فى المعادلة : ٣ س٢ + ١٩ س – ١٤ = ٠ يكون :

مجموع الجذرين = ... ، حاصل ضربهما = ...

(٥) فى المعادلة : ٤ س٢ + ٤ س – ٢٥ = ٠ يكون :

مجموع الجذرين = ... ، حاصل ضربهما = ...

(٦) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها ينقص ١ عن كل من جذرى المعادلة : س٢ – ٥ س + ٦ = ٠ هى ....

(٧) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذرى المعادلة : س٢ – ٣ س + ٢ = ٠ هى ....

(٨) المعادلة : س٢ + م س – ٢٧ = ٠ إذا كان س = ٣ أحد جذريها فإن م = ... ، الجذر الآخر = ...



(٩) المعادلة : س^{٢} – ٢ س + م = ٠ إذا كان س = – ١ أحد جذريها فإن م = ... ، الجذر الآخر = ...

(١٠) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + ٧ س + ٣ ك = ٠ يساوى مجموع جذرى المعادلة : س^{٢} – (ك + ٤) س = ٠ فإن ك = ...

• أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها : ٥ ، –٧

(١٢) كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها : ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، ١ – $\sqrt{٣}$ ت

(١٣) أوجد المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذرى المعادلة : س^{٢} – ٧ س – ٨ = ٠

(١٤) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : س^{٢} + ٥ س + ٢ = ٠ فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ل + ١ ، م + ١

(١٥) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : س^{٢} – ٦ س + ٧ = ٠ فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ٢ ل ، ٢ م

(١٦) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $\frac{١}{١٦}$ س^{٢} – ٩ س + ك = ٠ ثلاثة أمثال الجذر الآخر

(١٧) أوجد قيمة جـ التى تجعل جذرى المعادلة : ٣ س^{٢} – ٥ س + جـ = ٠ متساويين ثم أوجد الجذرين .

(٥) إشارة الدالة

المقصود ببحث إشارة الدالة إيجاد قيم س التى تجعل الدالة موجبة أ، سالبة أ، قيمتها تساوى الصفر

• **إشارة الدالة الثابتة :**

د (س) = جـ حيث جـ ≠ ٠ ⇐ إشارتها مثل إشارة جـ .

فمثلاً : الدالة د (س) = ٣ موجبة لكل س ∈ ح

، الدالة د (س) = – ٢ سالبة لكل س ∈ ح

(تدريب)

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = – $\frac{١}{٢}$ (ب) د (س) = $\frac{٥}{٢}$

الحل

• **إشارة الدالة الخطية :**

د (س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠

نضع د (س) = ٠ ونحسب قيمة س (ولتكن هـ)

ونرسم خط الأعداد ونحدد الإشارة كما هو مبين بالرسم

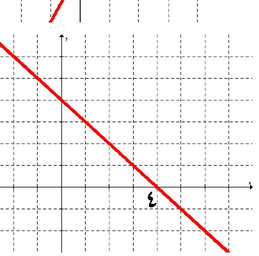
س > هـ : مثل إشارة معامل س — هـ — س < هـ : عكس إشارة معامل س — ٠

مثال (١)

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية مع توضيح ذلك بيانياً :

(أ) د (س) = ٢ س – ٦ (ب) د (س) = ٤ – س

الحل



(أ) د (س) = ٠ عندما ٢ س – ٦ = ٠

⇐ س = ٣

⇐ د (س) موجبة عندما س > ٣

، د (س) = ٠ عندما س = ٣

، د (س) سالبة عندما س < ٣

(ب) د (س) = ٠ عندما ٤ – س = ٠

⇐ س = ٤

∴ د (س) سالبة عندما س > ٤

، د (س) موجبة عندما س < ٤

(تدريب)

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = ٤ س – ١٢

(ب) د (س) = ٣ س

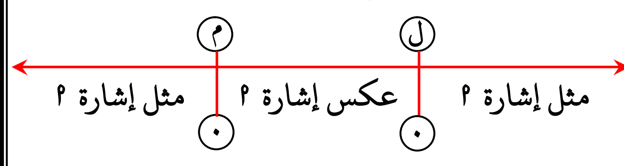
(جـ) د (س) = ٢ – ٤ س

• إشارة الدالة التربيعية :

د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

نوجد المميز (ب^{٢} − ٤ أ جـ)

• أولاً : إذا كان المميز > ٠ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان ل ، م فنضع د (س) = ٠ ونحسبهم



(أ) مثل إشارة أ عندما س ∈ ح − [ل ، م]

(ب) عكس إشارة أ عندما س ∈] ل ، م [

(جـ) د (س) = ٠ عندما س ∈ { ل ، م }

مثال (٢)

عيّن إشارة الدالة الآتية : د (س) = س^{٢} − س − ٦

الحل

المميز = (−١)^{٢} − ٤ × ١ × (−٦) = ٢٥ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان

د (س) = ٠ عندما س^{٢} − س − ٦ = ٠

⇐ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

⇐ د (س) موجبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٣]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ { ٣ ، −٢ }

، د (س) سالبة عندما س ∈]−٢ ، ٣[

• ثانياً : إذا كان المميز = صفر فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان : ل ، ل

ل

مثل إشارة أ | مثل إشارة أ

٠

مثل إشارة أ عندما س ≠ ل

، د (س) = ٠ عندما س = ل

مثال (٣)

عيّن إشارة الدالة الآتية : د (س) = ١٢ س − ٤ س^{٢} − ٩

الحل

المميز = (١٢)^{٢} − ٤ × (−٤) × (−٩) = صفر

∴ الجذران حقيقيان متساويان

د (س) = ٠ عندما ١٢ س − ٤ س^{٢} − ٩ = ٠

∴ ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩ = ٠ ⇐ (٢ س − ٣)^{٢} = ٠ ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$

⇐ د (س) سالبة عندما س ≠ $\frac{٣}{٢}$

، د (س) = ٠ عندما س = $\frac{٣}{٢}$

• ثالثاً : إذا كان المميز < صفر فإن المعادلة ليس لها جذور حقيقية وتكون إشارة الدالة مثل إشارة أ لكل س ∈ ح

مثال (٤)

عيّن إشارة الدالة الآتية : د (س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٤

الحل

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (−٣)^{٢} − ٤ × ٢ × ٤ = −٢٣ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

⇐ د (س) موجبة لكل س ∈ ح

مثال (٥)

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٥

(٢) د (س) = ١ − س^{٢} موضحاً ذلك على خط الأعداد .

الحل

(١) المميز = (−٤)^{٢} − ٤ × ١ × ٥ = −٤ < ٠

∴ الدالة ليس لها جذور حقيقية

∴ إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ح

(٢) المميز = ٠ − ٤ × (−١) × ١ = ٤ > ٠

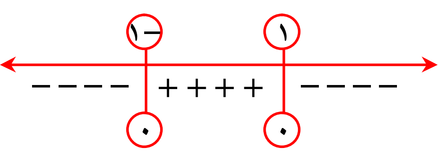
∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

د (س) = ٠ عندما ١ − س^{٢} = ٠ ∴ (١ − س) (١ + س) = ٠

∴ س = ١ أو س = −١

د (س) < ٠ عندما س ∈ ح − [−١ ، ١]

د (س) > ٠ عندما س ∈]−١ ، ١[



(تدريب)

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = س^{٢} – س + ٦

(٢) د (س) = ١٠ – ٥ س

(٣) د (س) = س – ٢ س^{٢} – ٢

مثال (٦)

د (س) = س^{٢} – ٥ س + ٦ ، ر (س) = ٢ س^{٢} – ٥ س – ١٨

بيّن متى تكون الدالتان د ، ر موجبتين معاً أو سالبتين معاً .

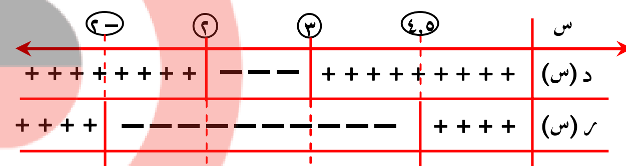
الحل

د (س) = ٠ عندما س^{٢} – ٥ س + ٦ = ٠

⇐ (س – ٢) (س – ٣) = ٠ أى س = ٢ أ، س = ٣

، ر (س) = ٠ عندما ٢ س^{٢} – ٥ س – ١٨ = ٠

⇐ (٢ س – ٩) (س + ٢) = ٠ ⇐ س = –٢ أ، س = ٤,٥



من الرسم :

الدالتان موجبتين معاً فى :] –∞ ، –٢ [∪] ٤,٥ ، ∞ [

أ، ع – [–٢ ، ٤,٥]

، الدالتان سالبتان معاً فى :] ٢ ، ٣ [

، الدالتان مختلفتان فى الإشارة فى :] –٢ ، ٢ [∪] ٣ ، ٤,٥ [

تمارين (٥) على إشارة المقدار الجبرى

• أكمل ما يأتى :

(١) الدالة د (س) = –٥ إشارتها .... فى الفترة ....

(٢) الدالة د (س) = س^{٢} + ١ إشارتها .... فى الفترة ....

(٣) الشكل المجاور يمثل دالة من الدرجة الأولى فى س :

(أ) د (س) موجبة فى الفترة ....

(ب) د (س) سالبة فى الفترة ....

(٤) الشكل المجاور يمثل دالة تربيعية فى س :

(أ) د (س) = ٠ عند س ∈ ....

(ب) د (س) > ٠ عند س ∈ ....

(ج) د (س) < ٠ عند س ∈ .....

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(٥) الدالة د (س) = ٧ موجبة فى الفترة ....

(أ) ع (ب) ع – {٧} (ج) {٧} (د)] ٠ ، ٧ [

(٦) الدالة د (س) = –٢ سالبة فى الفترة ....

(أ) ع (ب) ع – {–٢} (ج) {–٢} (د)] –٢ ، ٠ [

(٧) الدالة د (س) = س^{٢} – ٦ س + ٩ موجبة فى الفترة ....

(أ) ع (ب) ع – {٣} (ج)] ٠ ، ٣ [(د) {٣}

(٨) الدالة د (س) = س^{٢} – ٧ س + ١٢ سالبة فى الفترة ....

(أ)] ٣ ، ٤ [(ب) {٣ ، ٤} (ج) ع – [٣ ، ٤] (د) ع – {٣ ، ٤}

(٩) الدالة د (س) = س – ٢ موجبة عندما س ....

(أ) > ٢ (ب) < ٢ (ج) = ٢ (د) ع – {٢}

(١٠) الدالة د (س) = ٣ – س موجبة عندما س ....

(أ) > ٣ (ب) < ٣ (ج) = ٣ (د) ع – {٣}

(١١) الدالة د (س) = – (س – ١) (س + ٢) موجبة فى الفترة

(أ) {١ ، –٢} (ب)] –٢ ، ١ [(ج) ع – [–٢ ، ١] (د) [–٢ ، ١]

(١٢) ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = ٢ س (ب) د (س) = س^{٢}

(١٣) ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = (س – ٢) (س + ٣)

(ب) د (س) = (٢ س – ٣)^{٢}

(١٤) ارسم منحنى الدالة د (س) = س^{٢} – ٩ فى الفترة [–٣ ، ٤] ومن الرسم عيّن إشارة د (س) .

(١٥) ارسم منحنى الدالة د(س) = ٢ س − س^{٢} + ٤ فى الفترة [−٣ ، ٥] ومن الرسم عيّن إشارة د(س) .

(١٦) إذا كانت د(س) = س + ١ ، ر(س) = ١ − س^{٢} فعيّن الفترة التى تكون فيها الدالتان موجبتين معاً .

(٦) متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

نفس خطوات حل بحث إشارة الدالة التربيعية ولكننا فقط نكتب مجموعة الحل = الفترات التى تحقق المتباينة المعطاة .

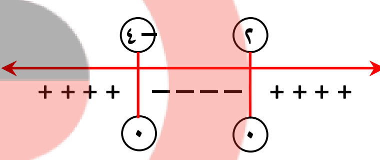
مثال (١)

حل المتباينة : س^{٢} + ٢ س − ٨ > ٠

الحل

س^{٢} + ٢ س − ٨ = ٠ عندما (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ أو س = ٢



∴ مجموعة حل المتباينة هى :]−∞ ، −٤[∪]٢ ، ∞[

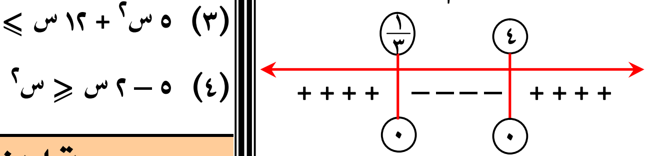
مثال (٢)

حل المتباينة : ٣ س^{٢} ≥ ١١ س + ٤

الحل

٣ س^{٢} − ١١ س − ٤ ≥ ٠ بوضع ٣ س^{٢} − ١١ س − ٤ = ٠

⇐ (٣ س + ١) (س − ٤) = ٠ ⇐ س = $-\frac{١}{٣}$ أو س = ٤



∴ مجموعة حل المتباينة هى :]−∞ ، $-\frac{١}{٣}$] ∪ [٤ ، ∞[

مثال (٣)

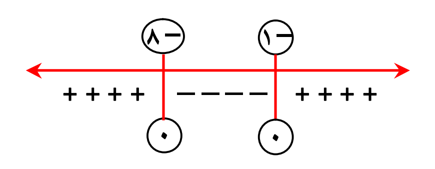
حل المتباينة : (س + ٣)^{٢} > ١٠ − ٣ (س + ٣)

الحل

س^{٢} + ٦ س + ٩ > ١٠ − ٣ س − ٩ ∴ س^{٢} + ٩ س + ٨ > ٠

بوضع س^{٢} + ٩ س + ٨ = ٠ ∴ (س + ١) (س + ٨) = ٠

∴ س = −١ أو س = −٨



∴ مجموعة حل المتباينة هى :]−٨ ، −١[

مثال (٤)

حل المتباينة : (س + ١)^{٢} > ٤ (٢ س − ١)^{٢}

الحل

س^{٢} + ٢ س + ١ > ٤ (٤ س^{٢} − ٤ س + ١)

س^{٢} + ٢ س + ١ > ١٦ س^{٢} − ١٦ س + ٤

س^{٢} + ٢ س + ١ − ١٦ س^{٢} + ١٦ س − ٤ > ٠

−١٥ س^{٢} + ١٨ س − ٣ > ٠ بالقسمة على (−٣) :

∴ ٥ س^{٢} − ٦ س + ١ < ٠ ، بوضع ٥ س^{٢} − ٦ س + ١ = ٠

∴ (٥ س − ١) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٥}$ أو س = ١

ومن الرسم المجاور :

∴ مجموعة حل المتباينة هى :]−∞ ، $\frac{١}{٥}$[∪]١ ، ∞[

(تدريب)

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

(١) س^{٢} − ٥ س − ٦ > ٠

(٢) ٨ − س^{٢} − ٢ س > ٠

(٣) ٥ س^{٢} + ١٢ س ≥ ٤٤

(٤) ٥ − ٢ س ≥ س^{٢}

تمارين (٦) على حل المتباينات

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة فى ح للمتباينة : س (س − ١) ≤ ٠

(أ) [٠ ، ١] (ب) {٠ ، ١}

(جـ)]٠ ، ١[(د) ح − [٠ ، ١]

(٢) مجموعة حل المتباينة فى ح للمتباينة : س^{٢} < ١ هى : ....

(أ)]−١ ، ١[(ب) ح − [−١ ، ١]





(جـ) ح − [−١ ، ١]　　　(ء) [−١ ، ١]

(٣) مجموعة حل المتباينة فى ح للمتباينة : $س^٢ \geq ١$ هى : ....

(أ)]−١ ، ١[　　　(ب) ح −]−١ ، ١[

(جـ) ح − [−١ ، ١]　　　(ء) [−١ ، ١]

(٤) مجموعة حل المتباينة فى ح للمتباينة : $س^٢ < ١$ هى : ....

(أ)]−١ ، ١[　　　(ب) ح −]−١ ، ١[

(جـ) ح − [−١ ، ١]　　　(ء) [−١ ، ١]

(٥) مجموعة حل المتباينة فى ح للمتباينة : $س^٢ \leq ١$ هى : ....

(أ)]−١ ، ١[　　　(ب) ح −]−١ ، ١[

(جـ) ح − [−١ ، ١]　　　(ء) [−١ ، ١]

- أوجد مجموعة الحل فى ح للمتباينات التربيعية الآتية :

(٦) $س^٢ \leq ١٦$

(٧) $س^٢ - ٤ \leq ٠$

(٨) $٣ س - س^٢ < ٠$

(٩) $س^٢ + ٧ \leq ٣$

(١٠) $س^٢ + ٧ \geq ٣$

(١١) $س (س - ٢) < ٠$

(١٢) $س (س + ٢) - ٣ \leq ٠$

(١٣) $(س - ٢)^٢ + ٥ \leq ٠$

(١٤) $٣ س^٢ \leq ٨ - ١٠ س$

(١٥) $س^٢ - ٤ س + ٤ \geq ٠$

(١٦) $س^٢ - ٤ س + ٤ > ٠$

(١٧) $٧ + س^٢ - ٤ س < ٠$

الوحدة الرابعة
حساب المثلثات
(١) الزاوية الموجهة

● **طرق قياس الزاوية**

● أولاً التقدير الستيني :

وحدات القياس هي الدرجات والدقائق والثواني بحيث :

الدرجة الواحدة (١°) = ٦٠ دقيقة (٦٠′)

، الدقيقة الواحدة = ٦٠ ثانية (٦٠″)

● **تعريف الزاوية الموجهة** :

هي زوج مرتب من شعاعين لهما نقطة بداية واحدة حيث يسمى الشعاعين ضلعي الزاوية ، نقطة البداية رأس الزاوية.

مثل ∠ ٩ و ب = (و٩ ، وب)

حيث : و٩ ضلع إبتدائي ، وب ضلع نهائي .

● **القياس الموجب للزاوية الموجهة** :

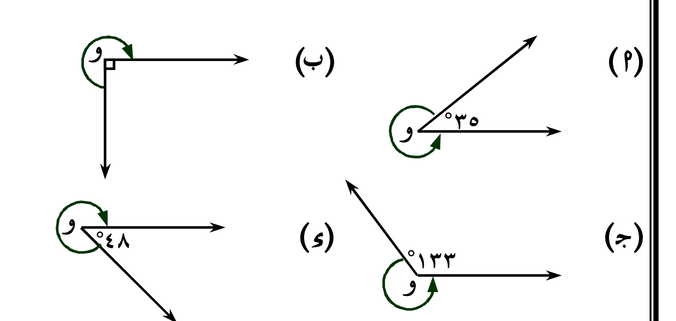
إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلي الضلع النهائي عكس حركة عقارب الساعة .

● **القياس السالب للزاوية الموجهة** :

إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلي الضلع النهائي مع حركة عقارب الساعة .

(تدريب)

أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها فى الأشكال الآتية :



● **الوضع القياسي للزاوية الموجهة** :

إذا كان ضلعها الإبتدائي هو الجزء الموجب لمحور السينات ورأسها نقطة الأصل .

● **ملاحظات هامة** :

[١] الزاوية الموجهة ٩ و ب ≠ الزاوية الموجهة ب و ٩ (لأنهما مختلفان فى الاتجاه)

[٢] لكل زاوية موجهة في وضعها القياسي قياسان أحدهما موجب و الأخر سالب بحيث يكون مجموعهما العددي ٣٦٠° مثل : (١٢٠ ، – ٢٤٠°) ، (١٥٠ ، – ٢١٠°) ،

● **موقع الزاوية فى المستوى الإحداثى المتعامد** :

(١) ينقسم المستوي إلي أربعة أرباع كما هو موضح بالشكل :

الربع الثانى	الربع الأول
الربع الثالث	الربع الرابع

(٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٠° = ٣٦٠°)

لمعرفة الربع الذي تقع فيه الزاوية لابد أن تكون موجبة ومحصورة في [٠ ، ٣٦٠° [

(٢) إذا وقع الضلع النهائى على أحد محورى الإحداثيات تسمى الزاوية فى هذه الحالة بالزاوية الربعية

(٣) الزوايا المتكافئة :

هي الزوايا التي لها ضلع نهائي واحد .

(وللحصول علي زوايا متكافئة نجمع أو نطرح ٣٦٠°)

مثال (١)

حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الأتية ثم أوجد زاوية مكافئة لكل منها ؟

(١) ٤٤٠° (٢) – ١٤٠° (٣) ٨٤٠°

(٤) – ٤٠٠° (٥) $\frac{\pi}{5}$ (٦) ٩٠°

الحل

(١) ٤٤٠° = ٤٤٠ – ٣٦٠ = ٨٠° تقع في الربع الأول

، ٤٤٠° تكافئ ٨٠°

(٢) – ١٤٠° = – ١٤٠ + ٣٦٠ = ٢٢٠° تقع في الربع الثالث

و تكافئ ٢٢٠°

(٣) ٨٤٠° = ٨٤٠ – (٢ × ٣٦٠) = ١٢٠° تقع في الربع الثاني

و تكافئ ١٢٠° (والمقصود أننا طرحنا ٣٦٠° مرتين)

(٤) – ٤٤٠° = – ٤٠٠ + (٢ × ٣٦٠) = ٣٢٠° تقع في الربع الرابع و تكافئ ٣٢٠°

(٥) $\frac{\pi}{٥} = \frac{١٨٠}{٥} = ٣٦°$ تقع في الربع الأول

و تكافئ ٣٦ + ٣٦٠ = ٣٩٦°

(٦) ٩٠° زاوية ربعية

(تدريب)

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب تكافئان كل من الزوايا الآتية :

(١) ٤٠° (٢) ١٥٠° (٣) – ١٢٥°

(٤) – ٢٤٠° (٥) – ١٨٠°

مساعدة :

٤٠° = ٤٠ + ٣٦٠ = ٤٠٠° (زاوية بقياس موجب)

، ٤٠° = ٤٠٠ + ٣٦٠ = ٧٦٠° (زاوية أخرى بقياس موجب)

، ٤٠° = ٤٠ – ٣٦٠ = – ٣٢٠° (زاوية بقياس سالب)

تمارين (١) على الزوايا المكافئة

(١) حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الآتية :

٥٧° ، ٢٢٠° ، – ٥٠٠° ، ٥١٠° ، – ٦٠° ، – ٣٠٠°

(٢) أوجد زاوييتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة تكافئ كل زاوية مما يأتي :

٦٥° ، ١٠٠° ، ١٤٠° ، – ١٥٠° ، – ١٨٠°

• أكمل ما يأتي

(٣) الزاوية التي قياسها ١٢٠° يكون قياسها السالب هو .... ، وتقع في الربع ....

(٤) الزاوية التي قياسها – ٣٠٠° قياسها الموجب = ... ، و تقع في الربع ....

(٥) الزاوية التي قياسها ٤٥° تكافئ زاوية موجبة قياسها .... ، و تكافئ زاوية سالبة قياسها ....

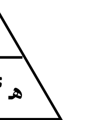
(٢) القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

• ثانياً : التقدير الدائري :

القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوس طوله ل في دائرة طول نصف قطرها نق هو :

$هـ^{د} = \frac{ل}{نق}$ ∴ ل = هـ^د × نق

، $نق = \frac{ل}{هـ^{د}}$



في الرسم السابق : ضع أصبعك على الرمز المطلوب ينتج قانونه .

• **تعريف الزاوية النصف قطرية :**

هي زاوية مركزية تحصر قوس طوله = طول نصف قطر الدائرة ٠

مثال (٢)

زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم تحصر قوس طوله ٢٥ سم . أوجد قياسها بالتقدير الدائري ؟

الحل

∵ ل = ٢٥ سم ، نق = ١٥ سم ∴ $هـ^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{٢٥}{١٥} = ١,٦٦^{د}$

مثال (٣)

زاوية مركزية قياسها ١,٢ ^د تحصر قوس طوله ١٢ سم . أوجد طول نصف قطر الدائرة .

الحل

∵ هـ^د = ١,٢ ^د ، ل = ١٢ سم ∴ $نق = \frac{ل}{هـ^{د}} = \frac{١٢}{١,٢} = ١٠$ سم

(تدريب)

زاوية مركزية قياسها ٢,٢ ^د في دائرة طول نصف قطرها ١٥سم . ما طول القوس الذي تحصره ؟

مثال (٤)

زاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٢٠ سم في دائرة محيطها ٤٤ سم أوجد قياسها الدائري ؟

الحل

∵ محيط الدائرة = ٢ π نق ∴ ٤٤ = ٢ × π × نق

⇐ نق = ٤٤ ÷ $\frac{٤٤}{٧}$ = ٧ سم

∴ $هـ^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{٢٠}{٧} = ٢,٨٦^{د}$ #

• **العلاقة بين التقديرين الدائري و الستيني :**

$$\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س°}{١٨٠}$$

حيث هـ^د قياس الزاوية بالتقدير الدائرى

، س° قياس الزاوية بالتقدير الستينى

أى عند التحويل من ستينى إلى دائرى نضرب × $\frac{\pi}{١٨٠}$

، عند التحويل من دائرى لستينى نضرب × $\frac{١٨٠}{\pi}$



مثال (٥)

أوجد القياس الدائري للزوايا الأتية :

٢٢٥° ، –٢٤٠° ، ٤٢٠° ، $\frac{٤\pi}{٥}$

الحل

س° = ٢٢٥° ⇐ هـ^ء = ٢٢٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٣,٩^ء

س° = –٢٤٠° = –٢٤٠° + ٣٦٠ = ١٢٠°

∴ هـ^ء = ١٢٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٢,١^ء

س° = ٤٢٠ – ٣٦٠ = ٦٠° ∴ هـ^ء = ٦٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٠٤٧^ء

س° = $\frac{٤\pi}{٥}$ ∴ هـ^ء = ٢,٥^ء #

(تدريب)

أوجد القياس الستيني للزوايا لكل من : ١,١^ء ، $\frac{٥\pi}{١٦}$

مثال (٦)

زاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٢٨سم في دائرة طول قطرها ٢٤ سم . أوجد قياسها الدائري و الستيني ؟

الحل

ل = ٢٨ سم ، نق = ١٢ سم

هـ^ء = $\frac{٢٨}{١٢}$ = ٢,٣^ء ⇐ س° = ٢,٣ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٢′ ٦٧°

لاحظ أننا بعد أن أوجدنا الناتج ضغطنا SHIFT o,,,

(تدريب)

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٤٠° في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

مثال (٧)

∆ ا ب جـ فيه : ق(ب) = ١,٢^ء ، ق(جـ) = ٥٠°

أوجد ق (ا) بالتقديرين الدائري و الستيني ؟

الحل

ق (ب) = ١,٢ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٦٨,٧٥° = ٤٥′ ٦٨°

∴ ق (ا) = ١٨٠° – (٥٠° + ٤٥′ ٦٨°) = ١٥′ ٦١°

= ١٥′ ٦١° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٠٧^ء

مثال (٨)

م دائرة ، ا ، ب نقطتان عليها بحيث ق (∠ ا م ب) = ٩٨° ، ا م = ٥ سم . إحسب طول ⌒ا ب ؟

الحل

٩٨° = ٩٨ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٧^ء

∴ ل = هـ^ء × نق = ١,٧ × ٥ = ٨,٥ سم

∴ طول ⌒ا ب = ٨,٥ سم #

لاحظ أن طول ⌒ا ب الأكبر = محيط الدائرة – طول ⌒ا ب

= ٢ π × ٥ – ٨,٥ = ٢٢,٩ سم

مثال (٩)

∆ ا ب جـ : النسبة بين قياسات زواياه ٣ : ٤ : ٥ أوجد القياس الستيني والدائري للزاوية جـ .

الحل

∵ ق(∠ ا) : ق (∠ ب) : ق(∠ جـ) = ٣ : ٤ : ٥

∴ نفرض أن : ق(∠ ا) = ٣ك ، ق (∠ ب) = ٤ك ، ق (∠ جـ) = ٥ك

∵ ق (∠ جـ) + ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

∴ ٣ك + ٤ك + ٥ك = ١٨٠ ⇐ ١٢ك = ١٨٠ ∴ ك = ١٥°

∴ ق (∠ جـ) = ٥ك = ٥ × ١٥ = ٧٥° = ٧٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٣^ء

تدريب

أوجد بدلالة π طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها ١٠٠° في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم .

تمارين (٢) على العلاقة بين التقديرين الدائرى والستينى

(١) أوجد التقدير الدائري للزاوية المركزية التي تحصر قوس طوله ٢٠ سم في دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم .

(٢) زاوية مركزية في دائرة طول قطرها ٣٠ سم تقابل قوس طوله ٤٥ سم أوجد قياسها الدائري ؟

(٣) أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٢,٢^ء في دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم

(٤) زاوية مركزية قياسها ٢^ء و تقابل قوس طوله ١٥ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها .





(٥) أوجد القياس الدائري للزوايا الأتية :

(أ) ٦٠°   (ب) ٤٠٠°   (جـ) – ١٦٠°

(ء) ٦٠٠°   (هـ) $\frac{٥\pi}{٩}$

(٦) أوجد التقدير الستيني للزوايا الأتية ..

(أ) ١,٣ ءَ   (ب) ٤ ءَ   (جـ) ٠,٧٢ π ءَ

(ء) ٢,٢ ءَ   (هـ) $\frac{٥\pi}{٩}$

(٧) دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم أوجد القياس الدائري والستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله ١٥ سم

(٨) زاوية مركزية قياسها ١٢٠° في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم أوجد طول القوس المقابل لهذه الزاوية

(٩) زاوية مركزية قياسها = ١,٤ ءَ ، تحصر قوساً طوله ٢٥ سم . أوجد طول نصف قطر دائرتها وأوجد قياسها بالتقدير الستيني ؟

(١٠) Δ أ ب جـ : ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ١,٣ ءَ . أوجد ق (∠ جـ) بالتقدير الستيني و الدائري

(١١) أكمل ما يأتي

(أ) الزاوية النصف قطرية هي ………

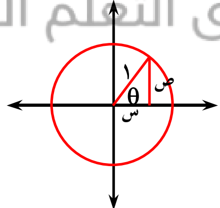
(ب) $\frac{س°}{هـ^ء} = \frac{.....}{.....}$

(٣) الدوال المثلثية



- **دائرة الوحدة :**

➢ هى دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة الأطوال



➢ الدائرة تقطع محور السينات فى النقطتين : أ (١ ، ٠) ، ب (–١ ، ٠)

➢ الدائرة تقطع محور الصادات فى النقطتين : جـ (٠ ، ١) ، ء (٠ ، –١)

➢ لأى نقطة (س ، ص) ∈ الدائرة يكون : $س^٢ + ص^٢ = ١$

➢ جا θ = $\frac{المقابل}{الوتر}$ = ص ، جتا θ = $\frac{المجاور}{الوتر}$ = س

∴ ظا θ = $\frac{المقابل}{المجاور} = \frac{ص}{س}$ ⇐ ظا θ = $\frac{جا θ}{جتا θ}$

➢ تذكر أن : $جتا^٢ θ + جا^٢ θ = ١$

➢ جيب الزاوية θ = جا θ ، جيب تمام الزاوية θ = جتا θ ، ظل الزاوية θ = ظا θ

- **مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية :**

قاطع الزاوية θ : قا θ = $\frac{١}{جتا θ} = \frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠

، قاطع تمام الزاوية θ : قتا θ = $\frac{١}{جا θ} = \frac{١}{ص}$ حيث ص ≠ ٠

، ظل تمام الزاوية θ : ظتا θ = $\frac{ص}{س}$ حيث جتا θ ≠ ٠

⇐ ظتا θ = $\frac{١}{ظا θ} = \frac{جتا θ}{جا θ}$

- **إشارات الدوال المثلثية :**

الشكل المجاور يوضح إشارات الدوال المثلثية لأى زاوية حسب الربع الواقعة فيه .

٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° = ٠°

(١) كل   (٢) جا   (٣) ظا   (٤) جتا

ولسهولة الحفظ نستخدم إحدى العبارتين التاليتين :

" كل جبار ظالم جته داهية "
أو " كل جميلة ظريفة جتها عريس " } كل ، جا ، ظا ، جتا

مثال (١٠)

إذا كان الضلع النهائي لزاوية (هـ) في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠,٦ ، ٠,٨) فأوجد الدوال المثلثية لهذه الزاوية ؟

الحل

جتاهـ = س = ٠,٦ ، جاهـ = ص = ٠,٨

، ظاهـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٠,٨}{٠,٦} = \frac{٤}{٣}$

مثال (١١)

حدد إشارات الدوال الأتية :

جا ٦٠° ، جتا ٢٤٠° ، ظا ٢١٠° ، قا ٣٠٠° ، جتا ١٥٠° ، ظا (–٣٠°)

الحل

٦٠° ∈ الربع الأول ∴ جا ٦٠° كمية موجبة

٢٤٠° ∈ الربع الثالث ∴ جتا ٢٤٠° كمية سالبة

٢١٠° ∈ الربع الثالث ∴ ظا ٢١٠° كمية موجبة

٣٠٠° ∈ الربع الرابع ∴ قا ٣٠٠° كمية موجبة

١٥٠° ∈ الربع الثانى ∴ جتا ١٥٠° كمية سالبة

−٣٠° = ٣٣٠° ∈ الربع الرابع ∴ ظا (−٣٠°) كمية سالبة

مثال (١٢)

إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، $\frac{٣}{٥}$) فأوجد قيمة س حيث س ∈ $ع^+$

ثم أوجد : جاهـ ، ظاهـ ، قاهـ

الحل

∵ (س ، $\frac{٣}{٥}$) ∈ دائرة الوحدة ∴ $س^٢ + (\frac{٣}{٥})^٢ = ١$

∴ $س^٢ + \frac{٩}{٢٥} = ١$ ∴ $س^٢ = ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥}$ ⇐ س = $\frac{٤}{٥}$

∴ النقطة هى ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)

∴ جتاهـ = $\frac{٣}{٥}$ ، جاهـ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظاهـ = $\frac{٤}{٣}$

، قاهـ = $\frac{١}{جتاهـ} = \frac{٥}{٣}$

(تدريب)

إذا كان الضلع النهائي للزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠,٨ ، ص) . فأوجد قيمة ص حيث ص ∈ $ع^+$ ثم أوجد الدوال المثلثية للزاوية هـ .

مثال (١٣)

إذا كان الضلع النهائي للزاوية (أ و ب) في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠,٦ ، ص) فأوجد قيمة ص حيث ص ∈ $ع^-$ ثم أوجد : ظا (أ و ب) ، قتا (أ و ب)

الحل

∵ (٠,٦ ، ص) ∈ دائرة الوحدة ∴ $(٠,٦)^٢ + ص^٢ = ١$

∴ $٠,٣٦ + ص^٢ = ١$ ∴ $ص^٢ = ١ - ٠,٣٦ = ٠,٦٤$

∴ ص = −٠,٨ ∴ النقطة هى (٠,٦ ، −٠,٨)

ظا (أ و ب) = $\frac{-٠,٨}{٠,٦} = \frac{-٤}{٣}$ ، قتا (أ و ب) = $\frac{١}{-٠,٨} = \frac{-٥}{٤}$

مثال (١٤)

إذا كان الضلع النهائي للزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٢ س ، س) فأوجد قيمة س الموجبة

ثم أوجد : جتاهـ ، قتاهـ

الحل

∵ (٢ س ، س) ∈ دائرة الوحدة ∴ $(٢س)^٢ + س^٢ = ١$

∴ $٤س^٢ + س^٢ = ١$ ∴ $٥س^٢ = ١$ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٥}$

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ∴ النقطة هى ($\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٥}}$)

∴ جتاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، قتاهـ = $\frac{١}{جاهـ} = ١ \div \frac{١}{\sqrt{٥}} = \sqrt{٥}$

• الدوال المثلثية لبعض الدوال الخاصة :

أولاً : الزوايا الربعية :

لاحظ أن دائرة الوحدة تقطع المحورين فى النقاط : (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، −١)

(١) الزاوية θ = ٠° أو θ = ٣٦٠°

جتا ٠° = جتا ٣٦٠° = ١ ، جا ٠° = جا ٣٦٠° = ٠

، ظا ٠° = ظا ٣٦٠° = ٠

(٢) الزاوية θ = ٩٠°

جتا ٩٠° = ٠ ، جا ٩٠° = ١ ، ظا ٩٠° = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

(٣) الزاوية θ = ١٨٠°

جتا ١٨٠° = −١ ، جا ١٨٠° = ٠ ، ظا ١٨٠° = ٠

(٤) الزاوية θ = ٢٧٠°

جتا ٢٧٠° = ٠ ، جا ٢٧٠° = −١

، ظا ٢٧٠° = $\frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

ثانياً : الزوايا : ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° :

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لكل زاوية على حدة حتى وإن طلب عدم استخدامها .

مثال (١٥)

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

٣ جا ٣٠° $جا^٢$ ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° $جتا^٢$ ٤٥°

الحل

نوجد قيم الدول المثلثية لكل زاوية على حدة بالآلة الحاسبة :

المقدار = $٣ \times \frac{١}{٢} \times (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ - ١ \times ٢ + (-١) \times (\frac{\sqrt{٢}}{٢})^٢$

نفك الأقواس ثم نضرب باستخدام الآلة الحاسبة :

المقدار = $٣ \times \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤} - ٢ - ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٨} - ٢ - \frac{١}{٢}$

نوجد الناتج باستخدام الآلة الحاسبة : المقدار = $\frac{-١١}{٨}$

(تدريب)

أوجد قيمة : ظا٢ ٣٠° + ٢ جا٢ ٤٥° + جتا٢ ٩٠°

تمارين (٣) على الدوال المثلثية

(١) حدد إشارات الدوال المثلثية الأتية :
جا ١١٠° ، جتا ١٢٠° ، ظا ٣١٥° ، قا ٤٥° ، ظا – ٣٠٠°
، قتا ٥٠٠° ، ظتا ٤٢٠°

(٢) إذا كانت س = ٤,٢ء فاوجد ىه($\widehat{س}$) بالتقدير الستيني
ثم حدد إشارة جا س ، جتا س ، ظا ٢ س .

(٣) إذا كانت : ٩٠ < θ < ١٨٠ ، جا θ = $\frac{٤}{٥}$ أوجد : جتا θ ،
ظا θ حيث θ زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة

(٤) إذا كان الضلع النهائي للزاوية هـ في وضعها القياسي
يقطع دائرة الوحدة في النقطة (– س ، $\frac{١}{٢}$) فأوجد قيمة
س الموجبة ثم أوجد ظاهـ ، جاهـ ، قتاهـ .

(٥) إذا كان الضلع النهائي للزاوية هـ في وضعها القياسي
يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، ٣ س) فأوجد قيمة س
الموجبة ، ثم أوجد جتاهـ ، جاهـ ، ظتاهـ .

(٦) إذا كان الضلع النهائي للزاوية جـ في وضعها القياسي
يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) فأوجد قيمة س
السالبة ثم أوجد الدوال المثلثية للزاوية جـ .

(٧) إذا كانت جتا ٲ = $\frac{٤}{٥}$ حيث ∠ ٲ حادة فأوجد الدوال
المثلثية للزاوية ٲ .

(٨) إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع
دائرة الوحدة في النقطة (س ، س) فأوجد قيمة س حيث
س > صفر ثم أوجد الدوال المثلثية لزاوية هـ .

(٩) أوجد قيمة : جتا $\frac{\pi}{٢}$ × جتا ٠° + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ × جا $\frac{\pi}{٢}$

(١٠) أثبت صحة كل مما يأتي :
(ٲ) ١ – ٢ جا٢ ٩٠° = جتا ١٨٠°
(ب) جتا $\frac{\pi}{٢}$ = جتا٢ $\frac{\pi}{٤}$ – جا٢ $\frac{\pi}{٤}$

(٤) الزوايا المنتسبة

• **تعريف :**

الزاويتان المنتسبتان : هما زاويتان الفرق بين (أو مجموع) قياسيهما عدداً صحيحاً من القوائم (٩٠ أ، ١٨٠ أ، ٢٧٠ أ، ٣٦٠) .

ونلخص هذا الدرس فى دراسة الأرباع وظيفة كل ربع .

أولاً : استخدام المحور الأفقي

يكون رمز كل ربع كالآتى :

الثانى | جا | كل | الأول
π = ١٨٠° — ١٨٠° | ٣٦٠° = ٢π
+ ١٨٠° | — ٣٦٠°
الثالث | ظا | جتا | الرابع

(١) الربع الأول :
ويشمل جميع الزوايا التى قياسها محصور بين الصفر والتسعين
أى : هـ ∈] ٠ ، ٩٠ [وليس له رمز لأن جميع زواياه حادة .

(٢) الربع الثانى :
ويشمل جميع الزوايا التى قياسها محصور بين ٩٠ ، ١٨٠
أى : هـ ∈] ٩٠ ، ١٨٠ [ويكون رمز الربع الثانى هو (١٨٠ – هـ)
حيث هـ قياس زاوية حادة .

(٣) الربع الثالث :
ويشمل جميع الزوايا التى قياسها محصور بين ١٨٠ ، ٢٧٠
أى : هـ ∈] ١٨٠ ، ٢٧٠ [ويكون رمز الربع الثانى هو (١٨٠ + هـ)
حيث هـ قياس زاوية حادة .

(٤) الربع الرابع :
ويشمل جميع الزوايا التى قياسها محصور بين ٢٧٠ ، ٣٦٠
أى : هـ ∈] ٢٧٠ ، ٣٦٠ [ويكون رمز الربع الثانى هو (٣٦٠ – هـ)
حيث هـ قياس زاوية حادة .

خطوات استخدام الأرباع أفقياً :
(١) نحدد الربع الواقع فيه الزاوية الغير حادة والمراد انتسابها .
(٢) نعبر عن الزاوية باستخدام رمز الربع الواقعه فيه .
(٣) نعين إشارة الدالة المثلثية المعطاة تبعاً لهذا الربع ونمسح رمز الربع وتبقى هـ فقط .

ثانياً : استخدام المحور الرأسى

$\frac{\pi}{٢}$ = ٩٠°
الثانى | جا | كل | الأول
+ ٩٠° | — ٩٠°
— ٢٧٠° | + ٢٧٠°
الثالث | ظا | جتا | الرابع
$\frac{٣\pi}{٢}$ = ٢٧٠°

(١) الربع الأول : رمزه (٩٠ – هـ)
(٢) الربع الثانى : رمزه (٩٠ + هـ)
(٣) الربع الثالث : رمزه (٢٧٠ – هـ)
(٤) الربع الرابع : رمزه (٢٧٠ + هـ)

خطوات استخدام الأرباع رأسياً :
(١) نحدد الربع الواقع فيه الزاوية الغير حادة والمراد انتسابها .
(٢) نعبر عن الزاوية باستخدام رمز الربع الواقعه فيه .





(٣) نعين إشارة الدالة المثلثية المعطاة تبعاً لهذا الربع

(٤) نتأتأ (أى نضيف أو نحذف حرف التاء من الدالة المثلثية) ثم نمسح رمز الربع وتبقى هـ فقط .

مثال (١٦)

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظا ٣٠٠°

الحل

جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠° = $\frac{-١}{٢}$

، ظا ٣١٥° = ظا (٣٦٠ − ٤٥) = − ظا ٤٥° = −١

، جا ٢٤٠° = جا (١٨٠ + ٦٠) = − جا ٦٠° = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

، ظا ٣٠٠° = ظا (٣٦٠ − ٦٠) = − ظا ٦٠° = $-\sqrt{٣}$

∴ المقدار = $(\frac{-١}{٢}) \times (-١) + (\frac{-\sqrt{٣}}{٢}) \times (-\sqrt{٣}) = ١$

مثال (١٧)

إذا كانت :

جتا ٣٣٠° ظتا ٢٤٠° + ٢ جتا (−١٣٥°) قتا ٤٥° جا ٩٠° = س

فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة س .

الحل

جتا ٣٣٠° = جتا (٣٦٠ − ٣٠) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ظتا ٢٤٠° = ظتا (١٨٠ + ٦٠) = ظتا ٦٠° = $\frac{١}{ظا ٦٠} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

، جتا (−١٣٥) = جتا ١٣٥° = جتا (١٨٠ − ٤٥)

= − جتا ٤٥° = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

، قتا ٤٥° = $\frac{١}{جا ٤٥} = \sqrt{٢}$ ، جا ٩٠° = ١

∴ المقدار = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) \times (\frac{١}{\sqrt{٣}}) + ٢ \times (\frac{-\sqrt{٢}}{٢}) \times (\sqrt{٢}) \times ١$

= $\frac{١}{٢} - ٢ = \frac{-٣}{٢}$

(تدريب)

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

جتا ٤٨٠ جا (−٣٠) ظا² ٢٢٥

مثال (١٨)

إذا كانت جاهـ = جتا ٢هـ فأوجد قيمة المقدار :

$$\frac{قا^{٢}(١٨٠-هـ)+ظا ١٣٥}{جا(١٨٠+هـ)\,جا^{٢}(١٨٠-٢هـ)}$$

الحل

∵ جاهـ = جتا ٢هـ ∴ جاهـ = جا (٩٠ − ٢هـ)

∴ هـ = ٩٠ − ٢هـ ∴ هـ + ٢هـ = ٩٠ ∴ ٣هـ = ٩٠ ⇐ هـ = ٣٠

حل آخر :

∵ جاهـ = جتا ٢هـ ∴ هـ + ٢هـ = ٩٠ ∴ ٣هـ = ٩٠

⇐ هـ = ٣٠°

∴ قا (١٨٠ − هـ) = − قاهـ = − قا ٣٠° = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

∴ قا² (١٨٠ − هـ) = $\frac{٤}{٣}$

، ظا ١٣٥° = ظا (١٨٠ − ٤٥) = − ظا ٤٥° = −١

، جا (١٨٠ + هـ) = − جاهـ = − جا ٣٠° = $\frac{-١}{٢}$

، جا (١٨٠ − ٢هـ) = جا ٢هـ = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا² (١٨٠ − ٢هـ) = $\frac{٣}{٤}$

∴ المقدار = $\frac{\frac{٤}{٣} - ١}{\frac{-١}{٢} \times \frac{٣}{٤}} = \frac{-٨}{٩}$

(تدريب)

إذا كان : ظا (س + ٢٠) = ظتا (س − ٢٠) فأوجد قيمة س ثم

أوجد قيمة المقدار : $\frac{قا^{٢}(١٨٠-س)}{ظا ١٣٥}$

• الحل العام للمعادلات المثلثية :

(١) إذا كان : جا $\theta_١$ = جتا $\theta_٢$ فإن : $\theta_١ \pm \theta_٢ = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

(لاحظ أن قياس زاوية الجيب أولاً)

(٢) إذا كان : ظا $\theta_١$ = ظتا $\theta_٢$ فإن : $\theta_١ + \theta_٢ = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$

مثال (١٩)

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(أ) جا ٤θ = جتا ٢θ

(ب) ٢ جا ($\frac{\pi}{٢} - \theta$) = ١

الحل

(أ) ∵ جا ٤θ = جتا ٢θ ∴ $٤\theta \pm ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

إما $٤\theta + ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ ∴ $٦\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

∴ $\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣} ن$

أو : $٤\theta - ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ ∴ $٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

∴ $\theta = \frac{\pi}{٤} + \pi ن$

∴ الحل العام هو : $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣} ن$ أو $\frac{\pi}{٤} + \pi ن$

(ب) ∵ ٢ جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta) = ١$

∴ ٢ جتا $\theta = ١$ ∴ جتا $\theta = \frac{١}{٢}$

، ∵ جتا θ موجبة ∴ $\theta \in$ الربع الأول أو الرابع

الربع الأول : $\theta = ٦٠ = ٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$

، الربع الرابع : $\theta = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠ = ٣٠٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{٥\pi}{٣}$

∴ الحل العام هو : $\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ن$ أو : $\frac{٥\pi}{٣} + ٢\pi ن$

مثال (٢٠)

أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in] ٠ ، \frac{\pi}{٢} [$ والتى تحقق كل من المعادلات الآتية :

(أ) قتا $(\theta - \frac{\pi}{٦}) =$ قا θ

(ب) ظا ٣θ – جتا ٢θ = ٠

الحل

(أ) ∵ قتا $(\theta - \frac{\pi}{٦}) =$ قا θ ∴ $\theta - \frac{\pi}{٦} \pm \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

∴ $\theta \pm \theta = \frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٦} + ٢\pi ن = \frac{٢\pi}{٣} + ٢\pi ن$

∴ $\theta + \theta = \frac{٢\pi}{٣} + ٢\pi ن$ ∴ $٢\theta = \frac{٢\pi}{٣} + ٢\pi ن$

∴ $\theta = \frac{\pi}{٣} + \pi ن$ أو : $\theta - \theta = ...$ (مرفوض)

عند ن = ٠ : $\theta = \frac{\pi}{٣} = ٦٠°$

عند ن = ١ : $\theta = \frac{\pi}{٣} + \pi$ (مرفوض)

(ب) ظا ٣θ = ظتا ٢θ ⇐ $٣\theta + ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$

∴ $٥\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$ ⇐ $\theta = \frac{\pi}{١٠} + \frac{\pi}{٥} ن$

عند ن = ٠ : $\theta = \frac{\pi}{١٠}$ ⇐ $\theta = ١٨°$

عند ن = ١ : $\theta = \frac{\pi}{١٠} + \frac{\pi}{٥} = \frac{٣\pi}{١٠}$ ⇐ $\theta = ٥٤°$

عند ن = ٢ : $\theta = \frac{\pi}{١٠} + \frac{٢\pi}{٥} = \frac{\pi}{٢}$ (مرفوض)

(تدريب)

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(أ) جتا ٥θ = جا θ

(ب) ٢ جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta) = ١$

تمارين (٤) على الزوايا المنتسبة

(ملاحظة : كل التمارين بدون استخدام الآلة الحاسبة)

(١) أكمل ما يأتى :

(أ) جا ١٣٥° = ... (ب) ظا ١٢٠° = ...

(ج) قا ٣٠٠° = ...

(د) إذا كان جا س = جا ص فإن .... ، أ ....

(٢) أوجد قيمة المقدار :

جا ٤٢٠° جا ١٢٠° – جتا ١٢٠° جا (–٣٩٠°)

(٣) أوجد قيمة المقدار :

جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظتا ١٢٠° – ظا ١٣٥° جا ٩٠°

(٤) أوجد قيمة المقدار :

جتا^٢ ١٨٠° + جا ٣٣٠° + جتا ١٢٠° – ظا (–٣١٥°)

(٥) إذا كانت : جا ١٥° = جتا (هـ + ١٥°) فأوجد قيمة هـ ثم أوجد قيمة المقدار : $\frac{جا^٢ هـ + جتا^٢ (١٨٠ - هـ)}{ظا ١٣٥ + جا ١٨٠}$

(٦) إذا كان : ظا س = ظتا ٢ س فأوجد قيمة س ثم أوجد قيمة المقدار : جتا^٢ (٩٠ – س) + جتا ٢ س – جا ٣ س

(٧) أثبت أن :

جا ١٥٠° جتا ١٢٠ + جا ٦٠٠° جتا ٣٣٠° = جتا ١٨٠°

(٨) أوجد قيمة المقدار : جا ٣١٥° جتا (–٦٧٥°) + قا^٢ ٣٠٠°

(٩) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(أ) جا ٣θ = جتا θ

(ب) جتا θ = جا ٥θ

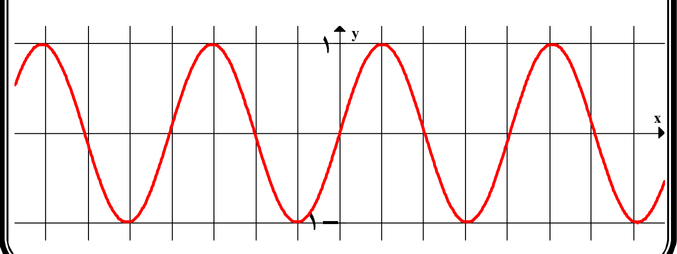
(ج) ظا ٤θ = ظتا ٢θ

(د) قتا ٦θ = قا ٣θ

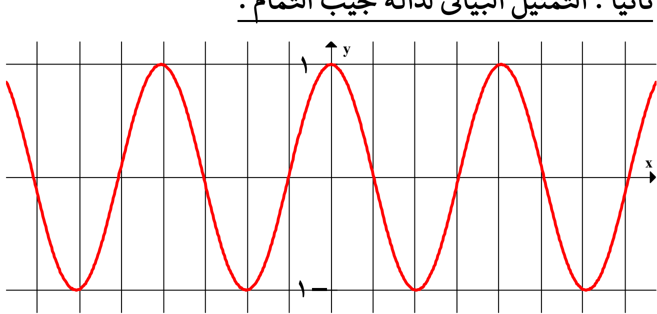
ثم أوجد قيم θ فى كل منها حيث $\theta \in] ٠ ، \frac{\pi}{٢} [$

(٥) التمثيل البيانى للدوال المثلثية

أولاً : التمثيل البيانى لدالة الجيب :



ثانياً : التمثيل البيانى لدالة جيب التمام :



خواص دالة الجيب ودالة جيب التمام :

(١) مجالها هو]–∞ ، ∞[

(٢) مداها = [–١ ، ١]   (٣) دورة الدالة = ٢ π

تمارين (٥) على التمثيل البيانى للدوال المثلثية

(١) مدى الدالة د حيث د (θ) = جا ٢ θ هو ....

(٢) مدى الدالة د حيث د (θ) = ٢ جا θ هو ....

(٣) مدى الدالة د حيث د (θ) = ٣ جتا θ هو ....

(٤) مدى الدالة د حيث د (θ) = جتا ٥ θ هو ....

(٥) أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدى لكل دالة من الدوال الآتية :

(أ) ص = ٤ جا θ

(ب) ص = $\frac{٣}{٢}$ جتا θ

(٦) مثل بيانياً الدالة : ص = ٤ جتا θ ومن الرسم أوجد :

(أ) مدى الدالة .

(ب) القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة .

(٦) إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

مثال (٢١)

إذا كانت : ٠ ⩽ θ ⩽ ٣٦٠ فأوجد قياس زاوية θ عندما

ظا$^{-1}$ (–٢,١٤٥٦)

الحل

ظل الزاوية θ = كمية سالبة ∴ θ ∈ الربع الثانى أو الرابع

الزاوية الحادة التى ظلها ٢,١٤٥٦ هى ٦٥ °

الربع الثانى : θ = ١٨٠ – ٦٥ = ١١٥ °

الربع الرابع : θ = ٣٦٠ – ٦٥ = ٢٩٥ °

ملاحظات :

(١) إذا كان المطلوب قياس أصغر زاوية موجبة فنأخذ قياس الزاوية فى الربع الأصغر فقط .

(٢) إذا كان المطلوب قياس أكبر زاوية موجبة فنأخذ قياس الزاوية فى الربع الأكبر.

(تدريب)

أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق كلاً من :

(أ) جا$^{-1}$ (٠,٢٣٥٦)   (ب) جتا$^{-1}$ (–٠,٦٤٢)

(جـ) ظتا$^{-1}$ (٣,٦٢١٨)   (ء) قا$^{-1}$ (–٢,٣٣٦٤)

مثال (٢٢)

إذا كان جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث θ أصغر زاوية موجبة فأوجد قيمة :

ظا θ ، جا (١٨٠ – θ) ، جا (٩٠ – θ) ، قتا (–θ)

الحل

∵ جا θ = ٠,٨ ∴ θ = جا$^{-1}$ (٠,٨) = ٥٣ َ ٨ °

∴ ظا θ = ظا ٥٣ َ ٨ ° = ١,٣ ، جا (١٨٠ – θ) = جا θ = ٠,٨

، جا (٩٠ – θ) = جتا θ = جتا ٥٣ َ ٨ ° = ٠,٦

، قتا (–θ) = – قتا θ = – $\frac{١}{جا θ}$ = – $\frac{١}{جا ٥٣ َ ٨ °}$ = – ١,٢٥

(ملاحظة : يمكن الحل برسم مثلث الزاوية θ كما هو موضح بالمثال التالى)

مثال (٢٣)

إذا كان ٤ ظا θ = ٣ حيث θ قياس زاوية حادة فأوجد قيمة :

(١) جتا^{٢} θ – جا^{٢} θ

(٢) جتا ١٢٠ ° جا (١٨٠ – θ) + جا ٥١٠ °

الحل

∵ θ قياس زاوية حادة ∴ θ ∈ الربع الأول

نرسم المثلث ثم نحسب طول الضلع الناقص

طول الوتر = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

(١) جتا^{٢} θ – جا^{٢} θ = $(\frac{٤}{٥})^{٢}$ – $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$ – $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

(٢) جتا ١٢٠ ° جا (١٨٠ – θ) + جا ٥١٠ °

= جتا (١٨٠ – ٦٠) جا θ + جا (٥١٠ – ٣٦٠)

$= -$ جتا ٦٠° جا θ + جا ١٥٠°

$= -$ جتا ٦٠° جا θ + جا (١٥٠ – ٣٠)

$= -$ جتا ٦٠° جا θ + جا ٣٠°

$= -\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٥} + \frac{١}{٢} = -\frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٥}$

حل آخر :

∵ ٤ ظا θ = ٣ ∴ ظا θ = $\frac{٣}{٤}$

∴ θ = ظا$^{-١}$ $(\frac{٣}{٤})$ = ٥٢ ٣٦° َ

(١) جتا² θ – جا² θ = (جتا ٥٢ َ ٣٦°)² – (جا ٥٢ َ ٣٦°)²

$=$ (٠,٨)² – (٠,٦)² = ٠,٦٤ – ٠,٣٦ = ٠,٢٨

مثال (٢٤)

إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب (٠,٦ ، –٠,٨) فأوجد ى(θ̂) حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

الحل

س > ٠ ، ص < ٠ ⇐ θ ∈ الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠ – جتا$^{-١}$ (٠,٦) = ٣٦٠ – ٨ َ ٥٣° = ٥٢ َ ٣٠٦°

(تدريب)

إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب(–٠,٦ ، –٠,٨)
فأوجد : ظا θ ، ظتا θ .

تمارين (٦) على إيجاد زاوية بمعلومية دالة مثلثية

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كان جا θ = ٠,٤٣٢٥ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ى(θ̂) يساوى ....

(أ) ٢٥,٦٢٦°   (ب) ٦٤,٣٤٧°
(ج) ٣٢,٣٨٨°   (د) ٤٦,٣١٦°

(٢) إذا كان ظا θ = ١,٨ ، وكانت ٩٠° ⩽ θ ⩽ ٣٦٠° فإن ى(θ̂) يساوى ....

(أ) ٦٠,٩٤٥°   (ب) ١١٩,٠٥٥°
(ج) ٢٤٠,٩٤٥°   (د) ٢٩٩,٠٥٥°

• أجب عن الأسئلة الآتية :

(٣) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة أ (–٠,٦ ، ٠,٨) فأوجد ى(θ̂) حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

(٤) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب$(-\frac{٥}{١٣} ، -\frac{١٢}{١٣})$ فأوجد ى(θ̂) حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

(٥) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة جـ $(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}})$ فأوجد ى(θ̂) حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

(٦) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة أ $(\frac{٣}{\sqrt{٣٤}} ، -\frac{٥}{\sqrt{٣٤}})$ فأوجد ى(θ̂) حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

(٧) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة جـ $(-\frac{١}{\sqrt{٥}} ، -\frac{١}{\sqrt{٥}})$ فأوجد قا θ ، قتا θ

(٨) إذا كان : جا θ = $\frac{١}{٣}$ ، وكانت : ٩٠° ⩽ θ ⩽ ١٨٠° فاحسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية ثم أوجد قيمة كل من : جتا θ ، ظا θ ، قا θ .

الهندسة

الوحدة الثانية : التشابه

(١) تشابه المضلعات

• المضلعان المتشابهان

يتشابه المضلعان اللذان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت

(١) الزوايا المتناظرة متطابقة .

(٢) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة .

• ملاحظات هامة :

(١) لكى يتشابه مضلعان لابد من توافر الشرطان معاً .

(٢) يراعى ترتيب كتابة الرؤوس المتناظرة لسهولة كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة .

(٣) تسمى نسبة التشابه بين مضلعين " معامل التشابه " .

(٤) إذا كان معامل تشابه المضلع ٢ب جـ ء للمضلع س ص ع ل يساوى (ك) فإن معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع ٢ب جـ ء يساوى $\left(\frac{١}{ك}\right)$.

(٥) $\frac{\text{محيط المضلع ٢ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}}$ = ك

(٦) ليكن ك معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٢

وكان : ك > ١ فإن م١ تكبير لـ م٢

، ٠ < ك < ١ فإن م١ تصغير لـ م٢

، ك = ١ فإن م١ يطابق م٢

(٧) كل مضلعين متطابقين متشابهان وليس كل مضلعين متشابهين متطابقين .

(٨) المضلعان المشابهان لثالث متشابهان .

(٩) كل المضلعات المنتظمة (المثلث المتساوى الأضلاع – المربع – الخماسى المنتظم – السداسى المنتظم ،،،،،، الخ) التى لها نفس عدد الأضلاع تكون متشابهة .

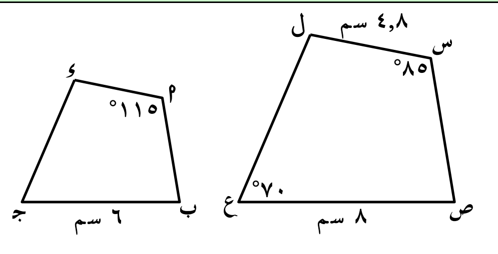
(١٠) المستطيل الذهبى :

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل آخر مشابه للمستطيل الأصلى بشرط أن يكون طوله أصغر من ضعف عرضه .

(١١) النسبة الذهبية : هى النسبة بين طول المستطيل الذهبى إلى عرضه = ١,٦١٨ : ١

مثال (١)

فى الشكل :



المضلع ٢ب جـ ء ∼ المضلع س ص ع ل

(٢) احسب ق(∠س ل ع) ، طول $\overline{٢ء}$

(ب) إذا كان محيط المضلع ٢ب جـ ء = ١٩,٥ سم أوجد محيط المضلع س ص ع ل

الحل

∵ المضلع ٢ب جـ ء ∼ المضلع س ص ع ل

∴ ق(∠٢) = ق(∠س) = ١١٥° ، ق(∠ب) = ق(∠ص) = ٨٥°

، ق(∠جـ) = ق(∠ع) = ٧٠°

∴ ق(∠ل) = ق(∠ء) = ٣٦٠ – (١١٥ + ٨٥ + ٧٠) = ٩٠°

، $\frac{٢ء}{س ل} = \frac{ب جـ}{ص ع}$ ∴ $\frac{٢ء}{٤,٨} = \frac{٦}{٨}$

∴ ٢ء = $\frac{٦}{٨}$ × ٤,٨ = ٣,٦ سم

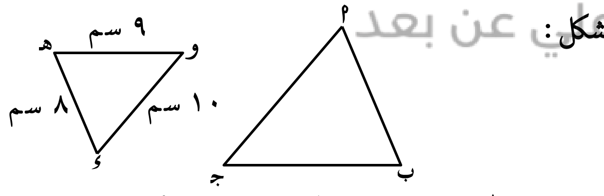
، ∵ $\frac{\text{محيط المضلع ٢ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{٦}{٨}$

∴ $\frac{١٩,٥}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{٣}{٤}$

∴ محيط المضلع س ص ع ل = $\frac{١٩,٥ \times ٤}{٣}$ = ٢٦ سم

(تدريب)

فى الشكل :



△ ٢ب جـ ∼ △ ء هـ و ، ء هـ = ٨ سم ، هـ و = ٩ سم ، و ء = ١٠ سم فإذا كان محيط △ ٢ب جـ = ٨١ سم .

أوجد أطوال أضلاع △ ٢ب جـ .

مثال (٢)

مستطيل ذهبى طوله ٧ سم أوجد عرضه لأقرب سنتيمتر .

الحل

∵ $\frac{٧}{\text{العرض}} = \frac{١,٦١٨}{١}$ ∴ العرض = $\frac{٧ \times ١}{١,٦١٨}$ = ٤ سم

(تدريب)

مستطيل ذهبي عرضه ٨ سم . أوجد طوله لأقرب سنتيمتر

تمارين (١) على تشابه المضلعات

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) المضلعان المشابهان لثالث ....

(أ) متطابقان (ب) متوازيان

(ج) متكافئان (د) متشابهان

(٢) مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثانى طوله ١٠ سم فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثانى .... : ......

(أ) ١ : ٥ (ب) ١ : ٣ (ج) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

(٣) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان

(أ) متطابقان (ب) متوازيان

(ج) متكافئان (د) متشابهان

(٤) إذا كان معامل التشابه لمضلعين متشابهين = ١ فإنهما ....

(أ) متطابقان (ب) متوازيان

(ج) متكافئان (د) متشابهان

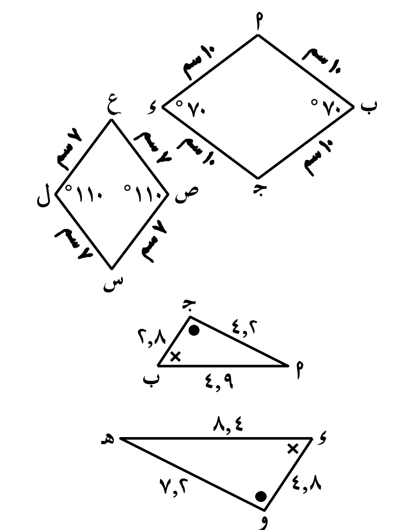
(٥) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٤ : ٩ فإذا كان محيط الأول ١٦ سم فإن محيط الثانى .... سم .

(أ) ٤ (ب) ١٦ (ج) ٣٦ (د) ٢,٢٥

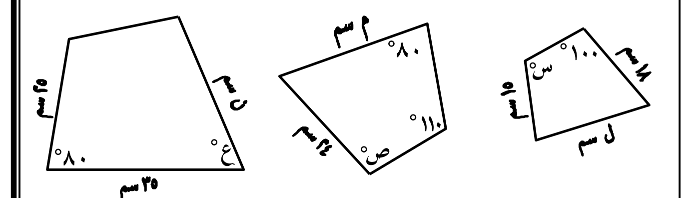
(٦) أكمل : يتشابه المضلعان إذا كان .... ، ....

• أجب عن الأسئلة الآتية :

(٧) كل من أزواج المضلعات التالية متشابهة . أكتبها بترتيب الرؤوس المتناظرة وحدد معامل التشابة (الأطوال بالسم)



(٨) المضلعات الثلاثة التالية متشابهة . أوجد القيمة العددية للرمز المستخدم فى القياس :



(٩) المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل . فإذا كان :

أ ب = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، س ص = ٣ م – ١ ،

ص ع = ٣ م + ١ . أوجد قيمة م العددية .

(١٠) مستطيل بعداه : ١٠ سم ، ٦ سم . أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان :

(أ) معامل التشابه = ٣

(ب) معامل التشابه = ٠,٤

(١١) مستطيلان متشابهان بُعدا الأول : ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثانى ٢٠٠ سم . أوجد طول المستطيل الثانى ومساحته .

(٢) تشابه المثلثات

• **مسلمة :**

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين .

مثال (٣)

△ أ ب جـ فيه : ق(أ̂) = ٦٥ ، ق(ب̂) = ٤٠

، △ س ص ع فيه : ق(ص̂) = ٦٥ ، ق(ع̂) = ٧٥ .

أثبت أن المثلثان متشابهين .

الحل

△ س ص ع فيه : ق(ص̂) = ٦٥ ، ق(ع̂) = ٧٥

∴ ق(س̂) = ١٨٠ – (٦٥ + ٧٥) = ٤٠

△ أ ب جـ ، س ص ع فيهما :

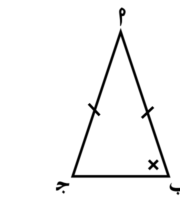
ق(أ̂) = ق(ص̂) = ٦٥ ، ق(ب̂) = ق(س̂) = ٤٠

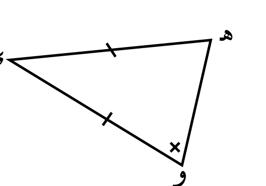
∴ المثلثان متشابهان .



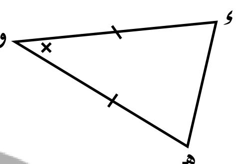
نظريات ونتائج هامة

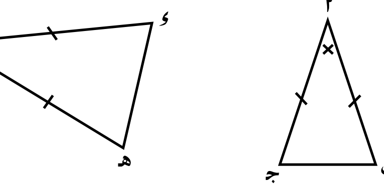
- **يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتى القاعدة فى أحدهما قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث الآخر .**



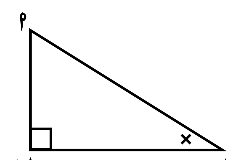


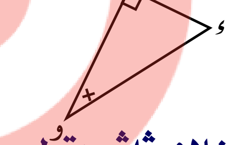
- **يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياسا زاويتى رأسيهما .**



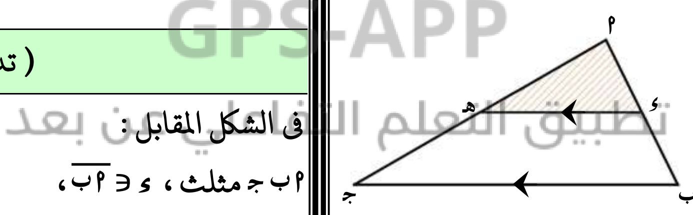


- **يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى المثلث الآخر .**



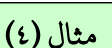


- **إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى .**



∵ $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ ∆ ا د هـ ~ ∆ ا ب جـ



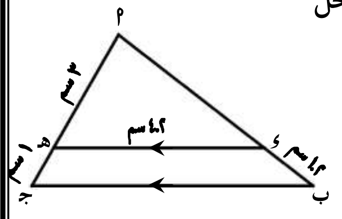
مثال (٤)

∆ ا ب جـ فيه ا جـ = ٤ سم ، رُسم $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ بحيث كان :

ب د = ١,٢ سم ، ا هـ = ٣ سم ، د هـ = ٤,٢ سم .

أوجد طول كل من : $\overline{\text{اد}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$.

الحل



∵ $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ ∆ ا د هـ ~ ∆ ا ب جـ

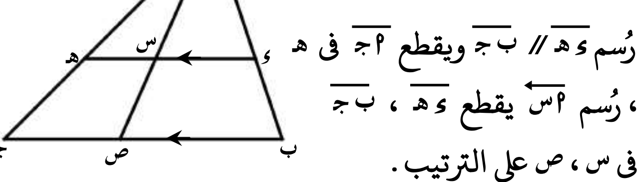
∴ $\frac{\text{اد}}{\text{اب}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{اجـ}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{اد}}{\text{اد}+1,2} = \frac{3}{4} = \frac{4,2}{\text{بجـ}}$

، $\frac{\text{اد}}{\text{اد}+1,2} = \frac{3}{4}$ ⟸ ٤ ا د = ٣ ا د + ٣,٦ ⟸ ا د = ٣,٦ سم

، $\frac{4,2}{\text{بجـ}} = \frac{3}{4}$ ⟸ ب جـ = $\frac{4,2 \times 4}{3}$ = ٥,٦ سم

مثال (٥)



فى الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{\text{اب}}$ ،

رُسم $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ويقطع $\overline{\text{اجـ}}$ فى هـ

، رُسم $\overrightarrow{\text{اس}}$ يقطع $\overline{\text{ده}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$

فى س ، ص على الترتيب .

(ا) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة

(ب) أثبت أن : $\frac{\text{دس}}{\text{بص}} = \frac{\text{سهـ}}{\text{صجـ}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$

الحل

(ا) ∵ $\overline{\text{دس}} \parallel \overline{\text{بص}}$ ∴ ∆ ا د س ~ ∆ ا ب ص

، ∵ $\overline{\text{سهـ}} \parallel \overline{\text{صجـ}}$ ∴ ∆ ا س هـ ~ ∆ ا ص جـ

، ∵ $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ∴ ∆ ا د هـ ~ ∆ ا ب جـ

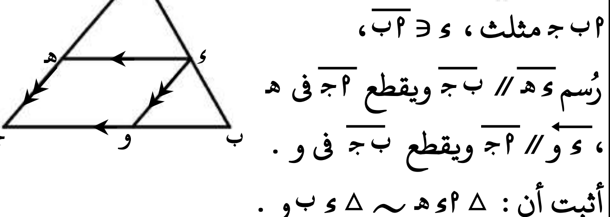
(ب) ∵ ∆ ا د س ~ ∆ ا ب ص ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{بص}} = \frac{\text{اد}}{\text{اب}}$ .... (١)

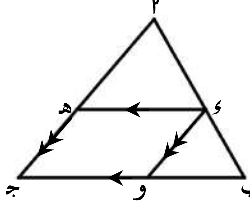
، ∵ ∆ ا س هـ ~ ∆ ا ص جـ ∴ $\frac{\text{سهـ}}{\text{صجـ}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{اجـ}}$ .... (٢)

، ∵ ∆ ا د هـ ~ ∆ ا ب جـ ∴ $\frac{\text{اد}}{\text{اب}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{اجـ}}$ .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{صب}} = \frac{\text{سهـ}}{\text{صجـ}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$

(تدريب)





فى الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{\text{اب}}$ ،

رُسم $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ويقطع $\overline{\text{اجـ}}$ فى هـ

، $\overleftrightarrow{\text{دو}} \parallel \overline{\text{اجـ}}$ ويقطع $\overline{\text{بجـ}}$ فى و .

أثبت أن : ∆ ا د هـ ~ ∆ د ب و .

- **فى المثلث القائم إذا رسم من رأس القائمة عمود على الوتر إنقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلى .**

∵ ∆ ا ب جـ قائم الزاوية فى ا

، $\overline{\text{اد}} \perp \overline{\text{بجـ}}$

∴ ∆ د ب ا ~ ∆ د ا جـ ~ ∆ ا ب جـ



ومن المفيد تذكر علاقات إقليدس التالية :

❁ $(أب)^2$ = ب ى × ب ج

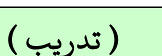
❁ $(أج)^2$ = ج ى × ج ب

❁ $(أى)^2$ = ى ب × ى ج

ايضاً : أى = $\frac{أب \times أج}{ب ج}$

مثال (٦)

فى الشكل المجاور :



أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى أ

، $\overline{أى} \perp \overline{ب ج}$ ، $\overline{ى هـ} \perp \overline{أب}$

، $\overline{ى و} \perp \overline{أج}$

أثبت أن : △ أى هـ ~ △ ج ى و

الحل

△ أ ى ج قائم فى ى ∴ ∠ ج تتم ∠ ١ .... (١)

، ∵ ق(أ) = ٩٠ ∴ ∠ ٢ تتم ∠ ١ .... (٢)

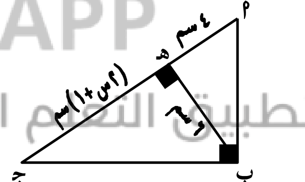
من (١) ، (٢) : ∴ ق(٢) = ق(ج)

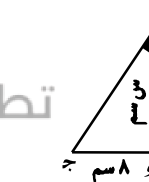
، ق(هـ) = ق(و) = ٩٠

∴ △ أى هـ ~ △ ج ى و

(تدريب)

فى كل من الشكلين التاليين أوجد قيمة س العددية :





● **إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان (نظرية ١) .**

فإذا كان :



$\frac{أب}{ى هـ} = \frac{ب ج}{هـ و} = \frac{أج}{ى و}$

⇐ △ أ ب ج ~ △ ى هـ و

مثال (٧)

فى الشكل المجاور :

س ص ع ل شكل رباعى فيه :

س ص = ١٥ سم ، ص ع = ١٨ سم

، ع ل = ٨ سم ، ل س = ١٠ سم

، س ع = ١٢ سم

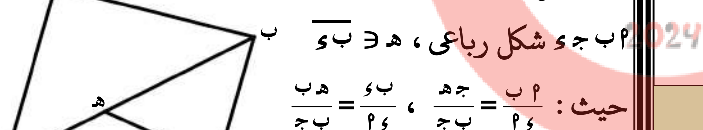
أثبت أن : △ س ص ع ~ △ ل س ع

الحل

<u>الفكرة</u> : لعمل التناسب بين أضلاع المثلثين نختار الأصغر على الأصغر ثم الأكبر على الأكبر ثم الثالث على الثالث حيث :

أضلاع المثلث الأول هى : س ص ، ص ع ، س ع

، أضلاع المثلث الثانى هى : ل س ، س ع ، ل ع



∵ $\frac{س ع}{ل ع} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ص ع}{س ع} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{س ص}{ل س} = \frac{١٥}{١٠} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{س ع}{ل ع} = \frac{س ص}{ل س} = \frac{ص ع}{س ع}$ ⇐ △ س ص ع ~ △ ل س ع

مثال (٨)

فى الشكل المجاور :

أ ب ج ى شكل رباعى ، هـ ∈ $\overline{ب ى}$

حيث : $\frac{أب}{أى} = \frac{ج هـ}{ج ب}$ ، $\frac{ب ى}{أى} = \frac{هـ ب}{ج ب}$

أثبت أن :

(أ) $\overline{أى} // \overline{ب ج}$ (ب) $\overline{أب} // \overline{ج هـ}$

الحل

<u>الفكرة</u> : لكى نثبت التوازى نثبت تشابه المثلثين المحتويين على طرفى التوازى (وهما هنا △ أ ب ى ، △ ج هـ ب) ثم نستنتج من التشابه تساوى زاويتين .

(أ) سنستغل المعطيات للوصول الى تناسب يؤدى للتشابه

∵ $\frac{أب}{أى} = \frac{ج هـ}{ج ب}$ ∴ $\frac{أب}{ج هـ} = \frac{أى}{ج ب}$ .... (١)

، ∵ $\frac{ب ى}{أى} = \frac{هـ ب}{ج ب}$ ∴ $\frac{ب ى}{هـ ب} = \frac{أى}{ج ب}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{أب}{ج هـ} = \frac{أى}{ج ب} = \frac{ب ى}{هـ ب}$ ∴ △ أ ب ى ~ △ ج هـ ب

وينتج من التشابه أن :

(أ) ق(أ ى ب) = ق(ج ب هـ) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{أى} // \overline{ب ج}$

(ب) وينتج : ق(∠أ ب ء) = ق(∠جـ هـ ب) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{جـ هـ}$

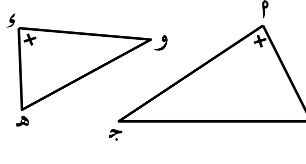
(تدريب)

فى الشكل المجاور : ب ، ص ، جـ على استقامة واحدة . أثبت أن :

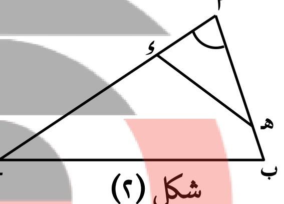
(أ) △ أ ب جـ ~ △ س ب ص

(ب) $\overrightarrow{ب جـ}$ ينصف ∠ أ ب س

• إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين (نظرية ٢) .



شكل (١)



شكل (٢)

فإذا كان : ق(∠أ) = ق(∠ء) كما فى شكل (١)

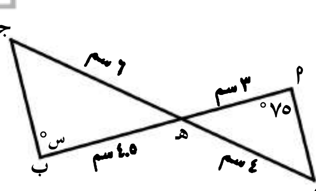
، $\frac{أب}{أجـ} = \frac{ءهـ}{ءو}$ فإن : △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

أو : ∠ أ زاوية مشتركة كما فى شكل (٢)

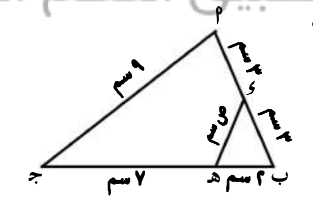
، $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أء}{أهـ}$ فإن : △ أ ب جـ ~ △ أ ء هـ

مثال (٩)

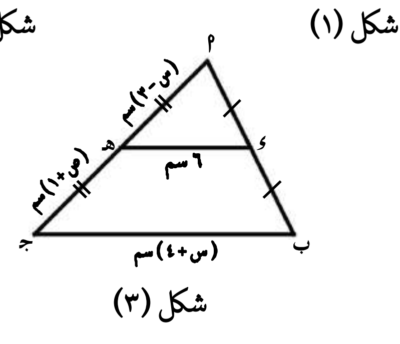
فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

الفكرة : نثبت تشابه المثلثين فى كل حالة ثم نستنتج المطلوب .

شكل (١) :

∵ ق(∠أ هـ ء) = ق(∠ب هـ جـ) بالتقابل بالرأس

، $\frac{أهـ}{هـء} = \frac{بهـ}{هـجـ} = \frac{٣}{٤}$

∴ △ أ هـ ء ~ △ ب هـ جـ

وينتج أن : ق(∠أ) = ق(∠ب) ⇐ س = ٧٥

شكل (٢) :

∵ ∠ب مشتركة ، $\frac{بهـ}{بء} = \frac{بأ}{بجـ} = \frac{٢}{٣}$

∴ △ ب هـ ء ~ △ ب أ جـ

وينتج أن : $\frac{بهـ}{بأ} = \frac{هـء}{أجـ}$ ∴ $\frac{١}{٣} = \frac{ص}{٩}$ ⇐ ص = ٣ سم

شكل (٣) :

∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ س − ٣ = ص + ١ ∴ ص = س − ٤

، ∵ ء ، هـ منتصفى الضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$

∴ △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

وينتج أن : $\frac{أء}{أب} = \frac{ءهـ}{بجـ}$

ولكن $\frac{أء}{أب} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{ءهـ}{بجـ} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٦}{س+٤} = \frac{١}{٣}$

∴ س + ٤ = ١٨ ⇐ س = ١٤ سم

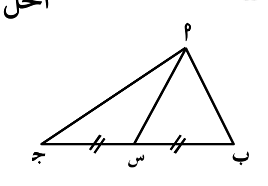
∴ ص = ١٤ − ٤ = ١٠ سم

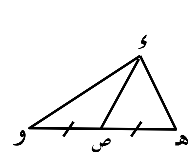
مثال (١٠)

أ ب جـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، س منتصف $\overline{بجـ}$ ، ص منتصف $\overline{هـو}$ حيث $\overline{بجـ}$ ، $\overline{هـو}$ ضلعان متناظران . أثبت أن :

(أ) △ أ ب س ~ △ ء هـ ص (ب) أس × ء هـ = أب × ء ص

الحل





(أ) ∵ △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ) .... (١)

، $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{بجـ}{هـو} = \frac{٢بس}{٢هـص} = \frac{بس}{هـص}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ △ أ ب س ~ △ ء هـ ص

(ب) وينتج من التشابه أن : $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{أس}{ءص}$

⇐ أس × ء هـ = أب × ء ص

(تدريب)

ا ب جـ مثلث ، ا ب = ٨ سم ، ا جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{ا ب}$ حيث ا هـ = ٢ سم ، ء ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ب ء = ٤ سم .

(ا) أثبت أن : △ ب ء هـ ∼ △ ب ا جـ واستنتج طول $\overline{ء هـ}$.

(ب) أثبت أن الشكل ا جـ ء هـ رباعى دائرى .

تذكر أن :

الشكل الرباعى يكون دائرياً إذا كان قياس الزاوية الخارجة عنه يساوى قياس الزاوية المقابلة للمجاورة لها

تمارين (٢) على تشابه المثلثات

(١) فى الشكل المجاور :

ا ب جـ مثلث قائم الزاوية ، $\overline{ا ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$. أكمل ما يأتى :

(١) △ ا ب جـ ∼ △ .... ∼ △ ....

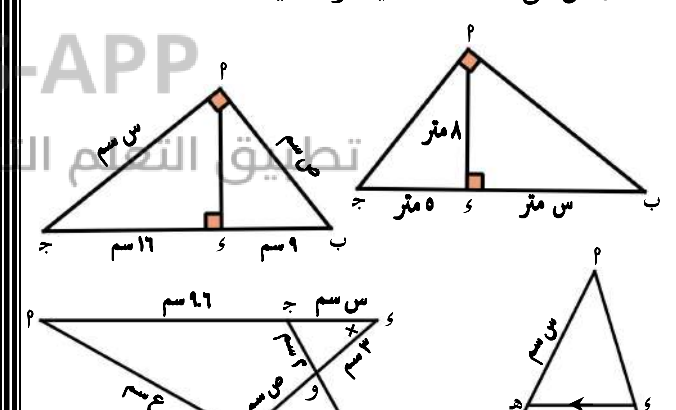
(٢) س/ع = م/..... (٣) س/ع = ل/.....

(٤) م/ل = س/..... (٥) ل/..... = .../ل

(٦) س/..... = .../س (٧) ...../ص = ص/.....

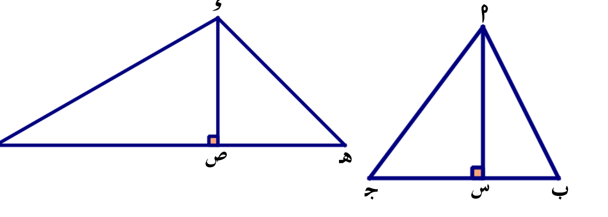
(٨) ل/س = .../ع (٩) ل/س = .../ص

(٢) فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة : س ، ص .





(٣) فى الشكلين التاليين :



△ ا ب جـ ∼ △ ء هـ و ، $\overline{ا س}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ء ص}$ ⊥ $\overline{هـ و}$.

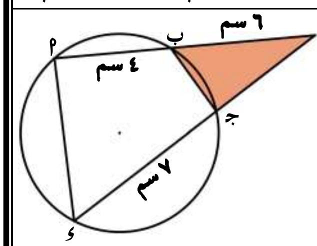
أثبت أن : ب س × ص و = جـ س × ص هـ

(٤) فى الشكل المجاور :

ا ب جـ ء متوازى أضلاع

أثبت أن :

△ هـ ء جـ ∼ △ و ب جـ



(٥) فى الشكل المجاور :

$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ء جـ}$ وتران فى دائرة

، ا ب = ٤ سم ، ء جـ = ٧ سم

، ب هـ = ٦ سم .

أثبت أن : △ ا ء هـ ∼ △ جـ ب هـ ثم أوجد طول $\overline{جـ هـ}$.

(٦) △ ا ب جـ فيه : ا ب = ٤ سم ، ا جـ = ٣ سم ، ء ∈ $\overrightarrow{ب ا}$ بحيث ا ء = ٤,٥ سم ، هـ ∈ $\overrightarrow{جـ ا}$ بحيث ا هـ = ٦ سم .

أثبت أن : الشكل ب جـ ء هـ رباعى دائرى .

(٣) العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

• **نظرية :**

النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما .

• **نتائج هامة :**

(١) النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما .

(٢) النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى متوسطين متناظرين فيهما .

(٣) النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى منصفين لزاويتين متناظرتين فيهما .

• **ملاحظة هامة :**

النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين محيطيهما .

مثال (١١)

أكمل ما يأتى :

(١) مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٤ فإذا كانت مساحة المثلث الأكبر ١١٢ سم². فإن مساحة المثلث الأصغر ....

(٢) إذا كان : △ أ ب جـ ∼ △ ء هـ و ، ل منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، م منتصف $\overline{\text{هـ و}}$ بحيث كان : أ ل = ٤ سم ، ء م = ٥ سم ، مساحة △ ء هـ و ١٥٠ سم² فإن مساحة △ أ ب جـ = ...

(٣) إذا كان : △ أ ب جـ ∼ △ ء هـ و ، $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ن ، $\overleftrightarrow{\text{ء ع}}$ ينصف ∠ ء ويقطع $\overline{\text{هـ و}}$ فى ع . وكان : $\frac{\text{ء ع}}{\text{أ ن}} = \frac{٣}{٤}$ ، مساحة △ أ ب جـ ١٢٠ سم² فإن : مساحة △ ء هـ و = ...

(٤) △ أ ب جـ ∼ △ ء هـ و ، رُسم $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ ، وكان أ س = ٣,٥ سم ، محيط △ ء هـ و = ١٤ سم ، محيط △ أ ب جـ = ٧ سم فإن طول ء ص = ... سم ، النسبة بين مساحتى المثلثين = ...

الحل

(١) بفرض المثلثين المتشابهين هما △ أ ب جـ ، △ ء هـ و

$$\therefore \frac{\text{محيط } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{ ء هـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة المثلث الأصغر}}{\text{مساحة المثلث الأكبر}} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^٢$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة المثلث الأصغر}}{١١٢} = \frac{٩}{١٦}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث الأصغر} = \frac{٩}{١٦} \times ١١٢ = ٦٣ \text{ سم}^٢$$

(٢) ∵ △ أ ب جـ ∼ △ ء هـ و ، أ ل ، ء م متوسطين متناظرين فيهما

$$\therefore \frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ ء هـ و}} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^٢$$

$$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب جـ})}{١٥٠} = \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$$

$$\therefore \text{م}(\triangle \text{ ء هـ و}) = \frac{١٦}{٢٥} \times ١٥٠ = ٩٦ \text{ سم}^٢$$

(٣) ∵ △ أ ب جـ ∼ △ ء هـ و ، $\overline{\text{أ ن}}$ ، $\overline{\text{ء ع}}$ منصفى زاويتين متناظرتين فيهما

$$\therefore \frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ ء هـ و}} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^٢$$

$$\therefore \frac{١٢٠}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^٢ = \frac{١٦}{٩}$$

$$\therefore \text{م}(\triangle \text{ ء هـ و}) = \frac{١٢٠ \times ٩}{١٦} = ٦٧,٥ \text{ سم}^٢$$

(٤) ∵ △ أ ب جـ ∼ △ ء هـ و ، $\overline{\text{أ س}}$ ، $\overline{\text{ء ص}}$ ارتفاعان متناظران فيهما

$$\therefore \frac{\text{محيط } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{ ء هـ و}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$$

$$\therefore \frac{٧}{١٤} = \frac{٣,٥}{\text{ء ص}} \quad \therefore \text{ء ص} = \frac{١٤ \times ٣,٥}{٧} = ٧ \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ ء هـ و}} = \left(\frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}\right)^٢ = \left(\frac{٣,٥}{٧}\right)^٢ = \frac{١}{٤}$$

(تدريب)

أ ب جـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، $\frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ و})} = \frac{٣}{٤}$

(أ) إذا كان محيط المثلث الأصغر ٤٥ $\sqrt{٣}$ سم . أوجد محيط المثلث الأكبر.

(ب) إذا كان هـ و = ٢٨ سم أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

• حقيقة هندسية :

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التى يشابه كل منها نظيره .

فإذا كان عدد أضلاع المضلع = ن ضلعاً فإن عدد المثلثات الناتجة عن طريق أقطاره المشتركة فى نفس الرأس = ن – ٢

• نظرية :

النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما .

مثال (١٢)

(١) إذا كان المضلع أ ب جـ ء ∼ المضلع أ' ب' جـ' ء' ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} = \frac{١}{٣}$ فاكتب مايساويه كل من :

$$\frac{\text{م}(\text{المضلع أ ب جـ ء})}{\text{م}(\text{المضلع أ' ب' جـ' ء'})} \quad ، \quad \frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع أ' ب' جـ' ء'}}$$

(٢) إذا كان المضلعان : أ ب جـ ء ، أ' ب' جـ' ء' متشابهان والنسبة بين مساحتيهما ٤ : ٢٥ فاكتب مايساويه كل من :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} \quad ، \quad \frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع أ' ب' جـ' ء'}}$$

الحل

(١) ∵ المضلع أ ب جـ ء ∼ المضلع أ' ب' جـ' ء'

$$\therefore \frac{\text{م}(\text{المضلع أ ب جـ ء})}{\text{م}(\text{المضلع أ' ب' جـ' ء'})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^٢ = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ = \frac{١}{٩}$$



، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جـَ ءَ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{١}{٣}$

(٢) ∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع أَ بَ جـَ ءَ

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب جـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ جـَ ءَ)}} = \frac{٤}{٢٥} = (\frac{٢}{٥})^٢ = (\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}})^٢$

⇐ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{٢}{٥}$

، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جـَ ءَ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{٢}{٥}$

مثال (١٣)

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٣ : ٤ . إذا كان مجموع مساحتيهما ٢٧٥ سم٢ فأوجد مساحة كل منهما .

الحل

∵ المضلعين متشابهين ∴ $\frac{\text{مساحة الأول}}{\text{مساحة الثانى}} = (\frac{٣}{٤})^٢ = \frac{٩}{١٦}$

نفرض مساحة الأول = ٩ك ، مساحة الثانى = ١٦ك

∴ ٩ك + ١٦ك = ٢٧٥ ∴ ٢٥ك = ٢٧٥ ⇐ ك = ١١

∴ مساحة المضلع الأول = ٩ × ١١ = ٩٩ سم٢

، مساحة المضلع الثانى = ١٦ × ١١ = ١٧٦ سم٢

(تدريب)

(١) مثلثان متشابهان مساحتى سطحيهما ١٠٠ ، ٦٤ سم٢ على الترتيب ، فإذا كان محيط الأول ٦٠ سم . أوجد محيط الثانى

(٢) النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٣ : ٤ . إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٧٧ سم٢ فأوجد مساحة كل منهما

(٣) سداسيان منتظمان ، طول ضلع الأول ٦ سم ، ومحيط الثانى ٤٨ سم ، فأوجد النسبة بين مساحتيهما .

تمارين (٣) على العلاقة بين المساحات

• أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و ، وكان أ ب = ٣ ء هـ فإن :

$\frac{\text{مـ (Δ ء هـ و)}}{\text{مـ (Δ أ ب جـ)}}$ = ...

(٢) إذا كان : Δ أ ب جـ ~ س ص ع

، مـ (Δ أ ب جـ) = ٩ مـ (س ص ع)

، وكان س ص = ٤ سم فإن أ ب = ... سم .

(٣) فى الشكل المجاور :

$\overline{أب} \cap \overline{جـء}$ = { هـ }

مـ (Δ أ جـ هـ) = ٩٠٠ سم٢

فإن : مـ (Δ ء هـ ب) = ... سم٢

(٤) فى الشكل المجاور :

ق($\widehat{ب أ جـ}$) = ٩٠

، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

، مـ (Δ أ ء جـ) = ١٨٠ سم٢

فإن : مـ (Δ أ ب جـ) = ... سم٢

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(٥) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٥ فإذا كان مجموع مساحتيهما ٢٦١ سم٢ فإن مساحة المضلع الأصغر تساوى .... سم٢ .

(أ) ١٨٤,٤ (ب) ٣٦ (جـ) ١٨٩٢,٢٥ (ء) ٦٥٢,٥

(٦) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ ، وكان مساحة المضلع الصغر ١٨ سم٢ فإن مساحة المضلع الأكبر = ... سم٢ .

(أ) ٢٧ (ب) ١٢ (جـ) ٨ (ء) ٤٠,٥

(٧) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٤ فإن النسبة بين مساحتيهما ....

(أ) ٣ : ٤ (ب) ١٦ : ٩ (جـ) ٤ : ٣ (ء) ٩ : ١٦

(٨) مضلعان متشابهان النسبة بين مساحتيهما ٣ : ٤ فإن النسبة بين محيطيهما ....

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٣ : ٤ (جـ) $\sqrt{٣}$: ٢ (ء) $\sqrt{٣}$: ٤

(٩) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٤ : ٩ فإذا كان محيط الأول ١٢ سم فإن محيط الثانى .... سم .

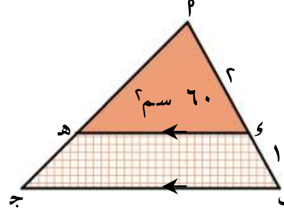
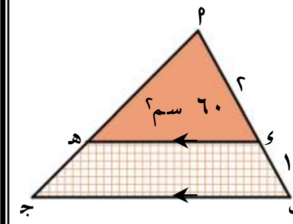
(أ) ٥,٣٣ (ب) ٢٧ (جـ) ٣,١٦ (ء) ٦٠,٧٥

(١٠) مستطيل بعداه ٤ سم ، ٣ سم فإن مساحة مستطيل آخر مشابه له ومعامل التشابه بينهما = ٢ هى سم٢

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (ء) ٤٨

• أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) فى الشكل المجاور :

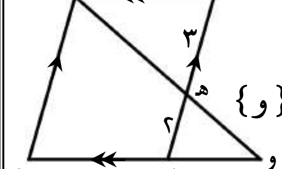



$\overline{أ د} = ٢ \overline{ب د}$ ، $\overline{د هـ} \parallel \overline{ب جـ}$

، م (Δ أ د هـ) = ٦٠ سم٢

أوجد مساحة شبه المنحرف د ب جـ هـ .

(١٢) فى الشكل المجاور :



أ ب جـ د متوازى أضلاع

، $\frac{أ هـ}{هـ ب} = \frac{٣}{٢}$ ، $\overleftrightarrow{د هـ} \cap \overleftrightarrow{جـ ب} = \{ و \}$

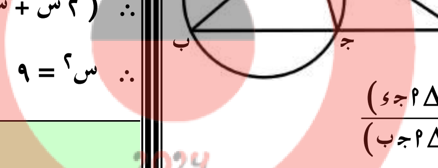
(١) أثبت أن :

Δ و جـ د ∼ Δ هـ أ د

(٢) أوجد : $\frac{م (Δ د جـ و)}{م (Δ هـ أ د)}$



(١٣) فى الشكل المجاور :



$\overline{أ د}$ قطعة مماسة للدائرة المارة

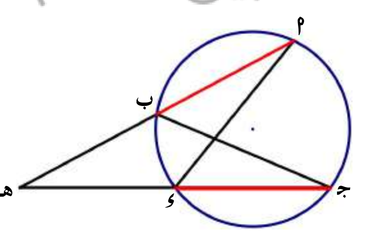
برؤوس Δ أ ب جـ

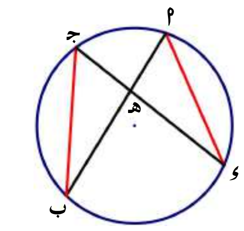
، ٢ أ ب = ٣ أ جـ . أوجد : $\frac{م (Δ أ جـ د)}{م (Δ أ جـ ب)}$

(٤) تطبيقات التشابه فى الدائرة

• **تمرين مشهور :**

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ لدائرة فى نقطة هـ فإن : هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د





وذلك من تشابه المثلثين : هـ أ د ، هـ جـ ب فينتج أن :

$\frac{هـ أ}{هـ جـ} = \frac{هـ د}{هـ ب}$ ⇐ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

(لاحظ أننا نخرج مرتين على الوتر من نقطة التقاطع)

مثال (١٤)

فى كل من الأشكال الآتية :

أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

الحل

الشكل الأول :

∵ $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{ هـ \}$ ∴ هـ جـ × هـ د = هـ أ × هـ ب

∴ (س + ٥) × ٥ = ١٢ × ٤ ∴ ٥ س + ٢٥ = ٤٨

∴ ٥ س = ٤٨ – ٢٥ = ٢٣ ⇐ س = ٤,٦ سم

الشكل الثانى :

∵ $\overleftrightarrow{جـ ب} \cap \overleftrightarrow{د هـ} = \{ أ \}$ ∴ أ د × أ هـ = أ جـ × أ ب

∴ (٢ س + س) × س = (٣ + ٦) × ٣ ∴ ٣ س٢ = ٢٧

∴ س٢ = ٩ ⇐ س = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

(تدريب)

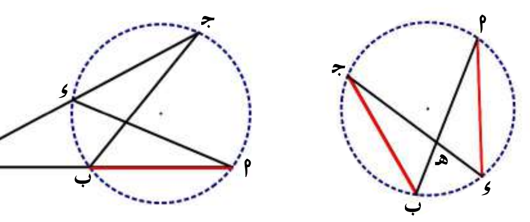
فى الشكل المجاور :

أوجد قيمة س حيث أن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات .

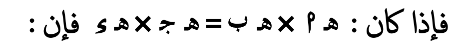


• **عكس التمرين المشهور :**

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ فى نقطة هـ ، وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د فإن : النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة .



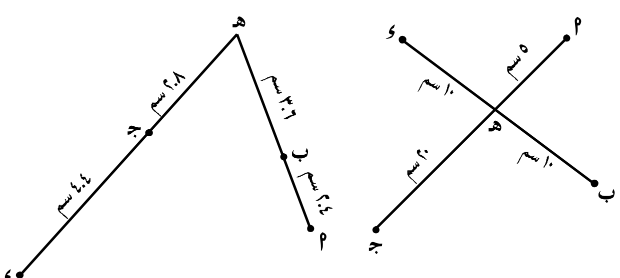
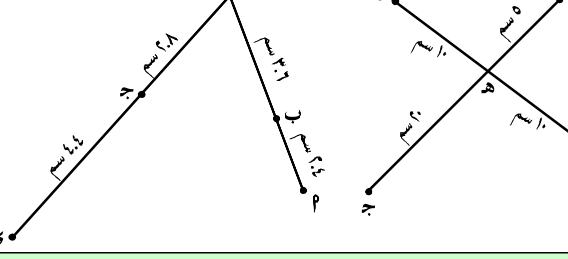
فإذا كان : هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د فإن :



النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة .

مثال (١٥)

فى أى من الشكلين التاليين يكون الشكل ٢ ب جـ ء رباعى دائرى

(تدريب)

فى الشكل المجاور :

أثبت أن النقط : ٢ ، ب ، جـ ، ء

تقع على دائرة واحدة .

● **نتائج هامة :**

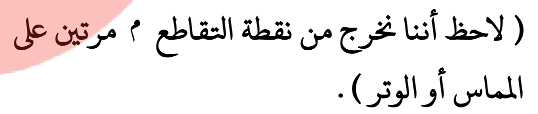
(١) إذا كانت م نقطة خارج دائرة

، م جـ يمس الدائرة فى جـ

، م ب يقطعها فى ٢ ، ب

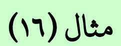
فإن : $(م جـ)^2$ = م ٢ × م ب

(لاحظ أننا نخرج من نقطة التقاطع م مرتين على المماس أو الوتر) .



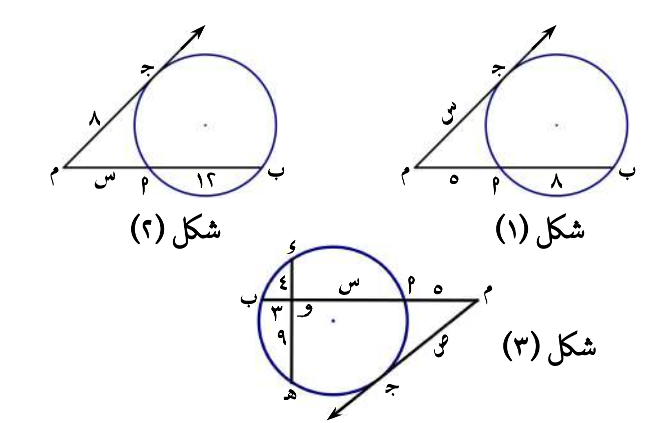
(٢) إذا كان : $(هـ ٢)^2$ = هـ ب × هـ جـ

فإن : هـ ٢ تمس الدائرة المارة بالنقط ٢ ، ب ، جـ .



مثال (١٦)

فى كل من الأشكال التالية هـ ٢ مماس للدائرة . أوجد قيم س ، ص العددية . (الأطوال مقاسة بالسنتيمترات)



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

الحل

شكل (١) :

∵ م جـ مماس ، م ب قاطع للدائرة

∴ $(م جـ)^2$ = م ٢ × م ب ∴ $س^2$ = ٥ (٥ + ٨)

∴ $س^2$ = ٦٥ ⟸ س = $\sqrt{٦٥}$ ≃ ٨,١ سم

شكل (٢) :

∵ م جـ مماس ، م ب قاطع للدائرة

∴ $(م جـ)^2$ = م ٢ × م ب ∴ ٦٤ = س (س + ١٢)

∴ $س^2$ + ١٢ س – ٦٤ = ٠ ∴ (س + ١٦) (س – ٤) = ٠

∴ س = –١٦ (مرفوض) ∴ س = ٤ سم

شكل (٣) :

∵ ٢ب ∩ ءهـ = { و } ∴ و٢ × وب = وء × وهـ

∴ س × ٣ = ٤ × ٩ ⟸ س = ١٢ سم

، ∵ م جـ مماس ، م ب قاطع للدائرة

∴ $(م جـ)^2$ = م ٢ × م ب ∴ $ص^2$ = ٥ (٥ + س + ٣)

∴ $ص^2$ = ٥ (٥ + ١٢ + ٣) ∴ $ص^2$ = ١٠٠ ⟸ ص = ١٠ سم

(تدريب)

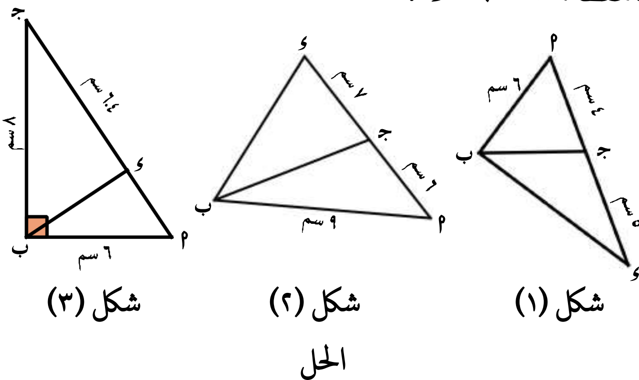
فى الشكل المجاور :

هـ ٢ مماس للدائرة ، هـ جـ يقطع الدائرة فى ء ، جـ على الترتيب . حيث :

هـ ء = ٤ سم ، جـ ء = ٥ سم . أوجد طول هـ ٢ .

مثال (١٧)

فى أى من الأشكال الآتية يكون ٢ب مماساً للدائرة المارة بالنقط : ب ، جـ ، ء ؟



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

الحل

شكل (١) :

∵ $(٢ب)^2$ = $(٦)^2$ = ٣٦ ، ٢جـ × ٢ء = ٤ (٤ + ٥) = ٣٦



∴ $(أب)^2 = أجـ \times أ ء$

∴ $\overline{أب}$ مماس للدائرة المارة بالنقط : ب ، جـ ، ء

شكل (٢) :

∵ $(أب)^2 = (٩)^2 = ٨١$ ، $أجـ \times أ ء = ٦ (٦ + ٧) = ٧٨$

∴ $(أب)^2 \neq أجـ \times أ ء$

∴ $\overline{أب}$ ليس مماس للدائرة المارة بالنقط : ب ، جـ ، ء

شكل (٣) :

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب : ∴ $(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$

∴ $(أجـ)^2 = (٦)^2 + (٨)^2 = ١٠٠$ ∴ أجـ = ١٠ سم

∴ أ ء = ١٠ – ٦,٤ = ٣,٦ سم

∵ $(أب)^2 = (٦)^2 = ٣٦$ ، $أ ء \times أجـ = ٣,٦ \times ١٠ = ٣٦$

∴ $(أب)^2 = أ ء \times أجـ$

∴ $\overline{أب}$ مماس للدائرة المارة بالنقط : ب ، جـ ، ء

(تدريب)

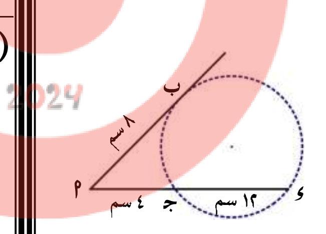
أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم

، أ جـ = ٤ سم ، ء ∈ $\overleftrightarrow{أجـ}$

، ء ∉ $\overline{أجـ}$ حيث جـ ء = ١٢ سم

أثبت أن $\overline{أب}$ تمس الدائرة

المارة بالنقط : ب ، جـ ، ء .



تمارين (٤) على تطبيقات التشابه فى الدائرة

- أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المجاور :

أ ب = ١٢ سم ، جـ هـ = ٤ سم

فإن : هـ ء = ...

(أ) ٥ سم (ب) ٦ سم

(جـ) ٨ سم (ء) ٩ سم

(٢) فى الشكل المجاور :

الدائرة م طول نصف

قطرها ٥ سم

، $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس لها عند ء

فإن أجـ = ...

(أ) ٣ سم (ب) ١٢ سم (جـ) ١٥ سم (ء) ١٨ سم

(٣) إذا تقاطع الوتران $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بهـ}$ فى نقطة ء فإن : ....

(أ) $أ ء \times ء جـ = ب ء \times ء هـ$

(ب) $هـ أ \times هـ ب = هـ جـ \times هـ ء$

(جـ) $ء ب \times ء أ = ء هـ \times ء جـ$

(ء) $ء أ \times ء هـ = ء جـ \times ء ب$

(٤) فى الشكل المجاور :

$\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة م

، أ ء = ١٥ سم

، أ ب = ٩ سم

فإن طول قطر الدائرة = ...

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٥ (ء) ٢٥

(٥) فى الشكل المجاور :

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{أو}$ ، $\overline{أهـ}$

قاطعان ، أ جـ = ٣ سم ،

جـ هـ = ٩ سم فإن أ ب = ...

(أ) $\sqrt{٦}$ سم (ب) ٣٦ سم (جـ) ٦ سم (ء) $٣\sqrt{٣}$ سم

(٦) فى الشكل المجاور :

كل العبارات الرياضية التالية

صحيحة ماعدا العبارة ....

(أ) $(أب)^2 = أجـ \times أ ء$

(ب) $(أب)^2 = أهـ \times أو$

(جـ) $أجـ \times أ ء = أهـ \times أو$

(ء) $أجـ \times جـ ء = أهـ \times هـ و$

(٧) فى الشكل المجاور :

أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ١٣ سم

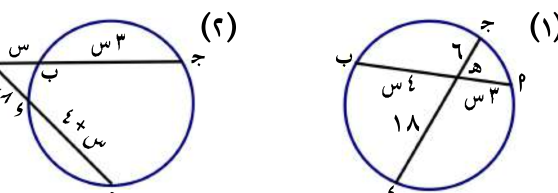
، أ ء = ٤ سم فإن ء هـ = ...

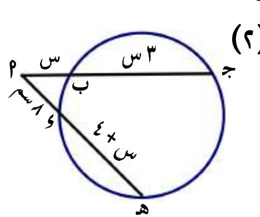
(أ) ١٢ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٤ سم (ء) ٢ سم

- أجب عن الأسئلة الآتية :

(٨) أوجد قيمة س العددية فى كل من الأشكال الآتية :

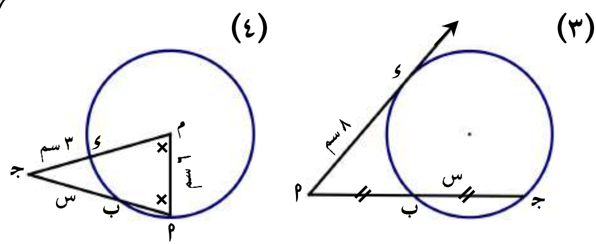
(١) (٢)





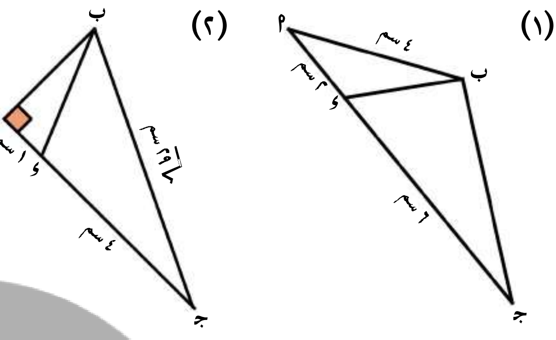


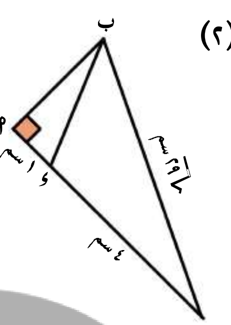
(٣) (٤)



(٩) فى أى من الشكلين التاليين يكون : $\overline{أب}$ مماس للدائرة المارة بالنقط : ب ، ج ، ء ؟

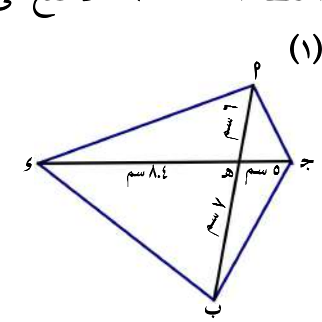
(١) (٢)

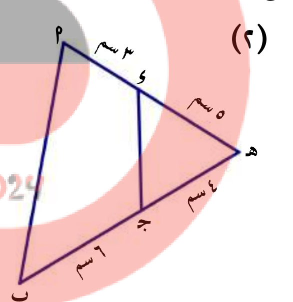




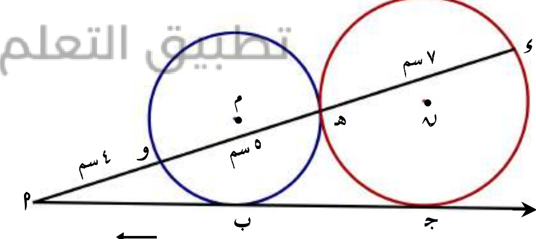
(١٠) فى كل من الشكلين التاليين أثبت أن :
النقط أ ، ب ، ج ، ء تقع على دائرة واحدة

(١) (٢)





(١١) فى الشكل الآتى :



الدائرتان م ، ن متماستان عند هـ ، $\overleftrightarrow{أج}$ يمس الدائرة م عند ب ، ويمس الدائرة ن عند ج ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرتين عند و ، ء على الترتيب . حيث : أو = ٤ سم ، وهـ = ٥ سم ، هـ ء = ٧ سم أثبت أن : ب منتصف $\overline{أج}$

(١٢) $\overline{أب} \cap \overline{جء} = \{هـ\}$ ، أهـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ ، ء هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ ج ،
إذا كان : ب هـ = ٦ سم ، ج هـ = ٥ سم .
أثبت أن : النقط أ ، ب ، ج ، ء تقع على دائرة واحدة.

(١٣) دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفى قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر $\overline{أء}$ فى الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى فى ب ، ج على الترتيب .
أثبت أن : أب × ب ء = ٩٥

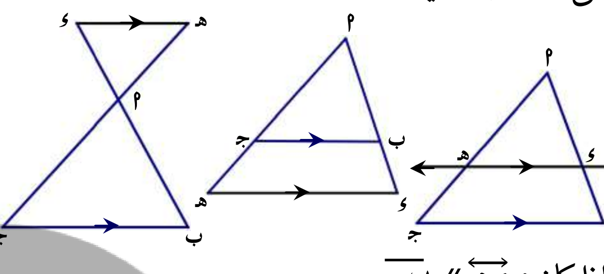


الوحدة الثالثة
نظريات التناسب فى المثلث
(١) المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

● **نظرية :**

إذا رُسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة .

ففى الأشكال التالية :



إذا كان : $\overleftrightarrow{ده} \parallel \overline{ب ج}$

فإن : $\frac{أد}{د ب} = \frac{أه}{ه ج}$

● **ملاحظة هامة :**

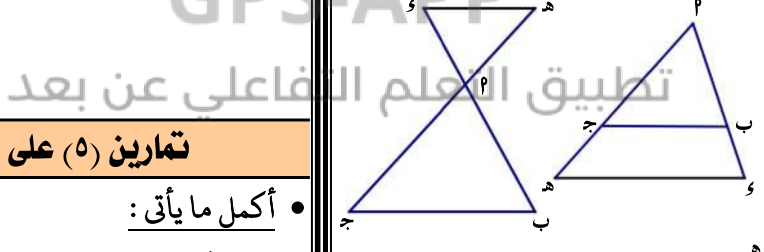
إذا كان $\overleftrightarrow{ده} \parallel \overline{ب ج}$ فإن :

$\frac{أد}{د ب} = \frac{أه}{ه ج}$ ، $\frac{أد}{أب} = \frac{أه}{أج}$ ، $\frac{أب}{د ب} = \frac{أج}{ه ج}$

● **عكس النظرية :**

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث .

ففى الأشكال التالية :



إذا كان : $\frac{أد}{د ب} = \frac{أه}{ه ج}$

فإن : $\overleftrightarrow{ده} \parallel \overline{ج ب}$

أى أن : التوازى ⇐ التناسب ، التناسب ⇐ توازى

مثال (١)

فى الشكل المجاور :

$\overline{ده} \parallel \overline{أج}$ ، $\overline{أه} \cap \overline{ج د} = \{ب\}$

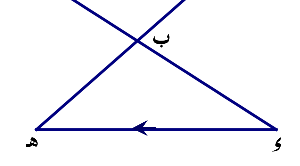
، أب = ٨ سم ، ج ب = ٩ سم ، ب ه = ١٢ سم . أوجد طول $\overline{ب د}$

الحل

∵ $\overline{ده} \parallel \overline{أج}$ ∴ $\frac{أب}{ب ه} = \frac{ج ب}{ب د}$ ∴ $\frac{٨}{١٢} = \frac{٩}{ب د}$



∴ ب د = $\frac{٩ \times ١٢}{٨}$ = ١٣٫٥ سم



(تدريب)

فى الشكل المجاور :

$\overline{د ه} \parallel \overline{أج}$ ، $\overline{أه} \cap \overline{ج د} = \{ب\}$

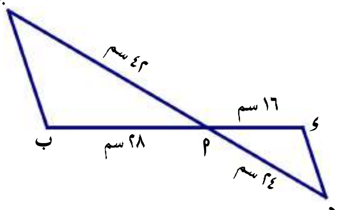
، أب = ٦ سم ، ب ه = ٩ سم ،

ج د = ١٨ سم . أوجد طول $\overline{ب ج}$

مثال (٢)

فى الشكل المجاور :

أثبت أن : $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$



الحل

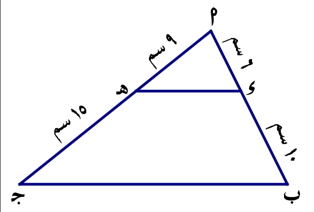
∵ $\frac{أد}{أب} = \frac{١٦}{٢٨} = \frac{٤}{٧}$ ، $\frac{أه}{أج} = \frac{٢٤}{٤٢} = \frac{٤}{٧}$ ∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{أه}{أج}$

⇐ $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$

(تدريب)

فى الشكل المجاور :

أثبت أن : $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$



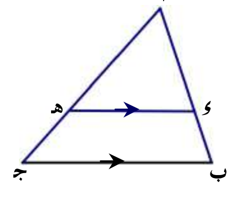
تمارين (٥) على المستقيمات المتوازية

● أكمل ما يأتى :

فى الشكل المجاور :

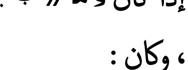
إذا كان $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$

، وكان :



(١) $\frac{أد}{د ب} = \frac{٥}{٣}$ فإن :

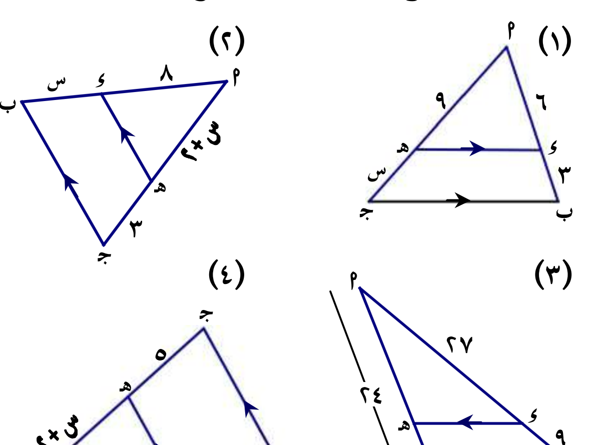
$\frac{أب}{د ب} = ...$ ، $\frac{ج ه}{أه} = ...$



(٢) $\frac{أه}{أج} = \frac{٤}{٧}$ فإن :

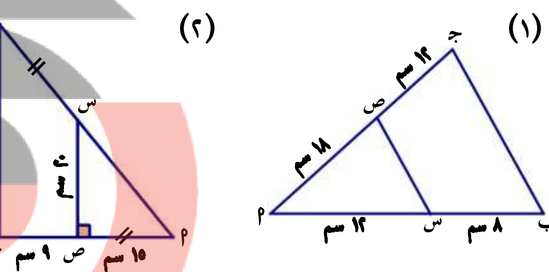
$\frac{ج ه}{أه} = ...$ ، $\frac{د ب}{أب} = ...$

(٣) فى كل من الأشكال الآتية $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقاسة بالسنتيمترات) :

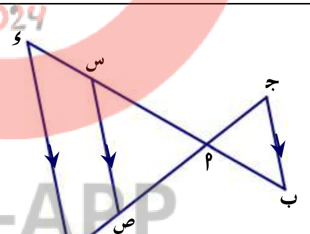


(٤) فى كل من الشكلين التاليين أثبت أن : $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

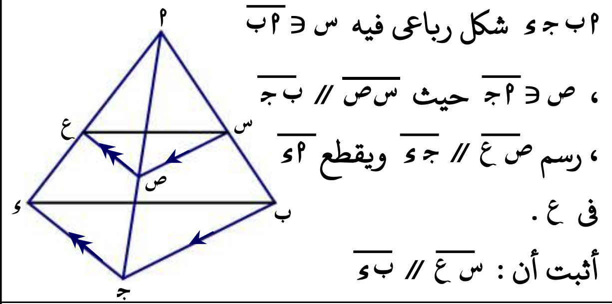




(٥) فى الشكل المجاور : $\overline{\text{جـ هـ}} \cap \overline{\text{ب د}} = \{ \text{أ} \}$ ، س ∈ $\overline{\text{أ د}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ هـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}} \parallel \overline{\text{هـ د}}$ فإذا كان أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٥ سم ، أ د = ١٢ سم ، هـ ص = ٤ سم . أوجد طول كل من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{د س}}$.



(٦) فى الشكل المجاور : أ ب جـ د شكل رباعى فيه س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، رسم $\overline{\text{ص ع}} \parallel \overline{\text{جـ د}}$ ويقطع $\overline{\text{أ د}}$ فى ع . أثبت أن : $\overline{\text{س ع}} \parallel \overline{\text{ب د}}$



(٧) أ ب جـ د شكل رباعى تتقاطع قطراه فى م . رسم $\overleftrightarrow{\text{م هـ}} \parallel \overline{\text{د أ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{م و}} \parallel \overline{\text{جـ د}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى و أثبت أن : $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

(٨) فى الشكل المجاور : أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{د و}} \parallel \overline{\text{أ هـ}}$ أثبت أن : $(\text{جـ هـ})^2 = \text{جـ و} \times \text{جـ ب}$

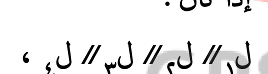
(٩) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٤ سم ، أ جـ = ٢١ سم ، د ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ د = ٥,٦ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث أ هـ = ٨,٤ سم . أثبت أن : $\overline{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

(١٠) فى الشكل المجاور :
(١) إذا كان أ د = ٤ ، ب د = ٨ ، جـ هـ = ٦ أوجد طول $\overline{\text{أ هـ}}$
(٢) إذا كان أ د = س ، ب و = س + ٥ ، ٢ د ب = ٣ و جـ = ١٢ أوجد قيمة س .

• نظرية تاليس العامة :

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .

فى الشكل المجاور :
إذا كان :
$ل_1 \parallel ل_2 \parallel ل_3 \parallel ل_4$ ،
م ، مَ قاطعان لها فإن :
أ ب : ب جـ : جـ د = أَ بَ : بَ جـَ : جـَ دَ



• ملاحظة :

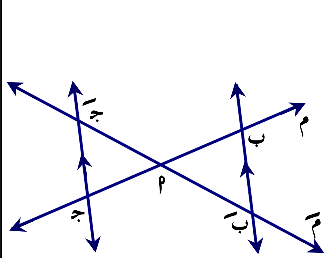
فى الشكل السابق : ∵ $ل_1 \parallel ل_2 \parallel ل_3 \parallel ل_4$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أَ جـَ}}{\text{جـَ دَ}}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أَ جـَ}}{\text{جـَ بَ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{د أ}} = \frac{\text{بَ دَ}}{\text{دَ أَ}}$

، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جـَ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جـَ دَ}}$

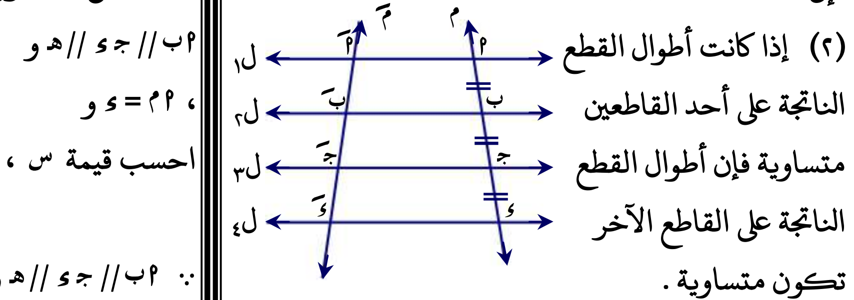
• حالات خاصة :

(١) إذا كان م ∩ مَ = { أ }
، وكان : $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ جـَ}}$
فإن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ بَ}}{\text{أ جـَ}}$



والعكس صحيح : إذا كان : أب / أجـ = أ'ب' / أ'جـ'

فإن : بب' // جـجـ'



(٢) إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية .

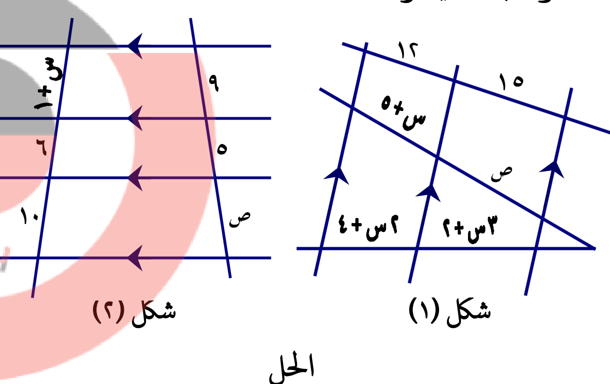
فإذا كان : ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، وكان : أب = ب جـ = جـ ء

فإن : أ'ب' = ب'جـ' = جـ'ء'

مثال (٣)

فى كل من الأشكال التالية احسب قيم س ، ص العددية :

(الأطوال بالسنتيمترات)



الحل

شكل (١) :

∵ المستقيمات متوازية ∴ (٣س + ٢) / (٢س + ٤) = ١٥ / ١٢ = ٥ / ٤

∴ ٤ (٣س + ٢) = ٥ (٢س + ٤)

∴ ١٢س + ٨ = ١٠س + ٢٠

∴ ١٢س − ١٠س = ٢٠ − ٨ ∴ ٢س = ١٢ ⟸ س = ٦ سم

، ص / (س + ٥) = ١٥ / ١٢ ∴ ص / ١١ = ٥ / ٤

∴ ص = (١١ × ٥) / ٤ = ١٣,٧٥ سم

شكل (٢) :

∵ المستقيمات متوازية

∴ (س + ١) / ٦ = ٩ / ٥ ∴ س + ١ = (٦ × ٩) / ٥

∴ س = ١٠,٨ − ١ = ٩,٨ سم

، ص / ٥ = ١٠ / ٦ ∴ ص / ٥ = ٥ / ٣

∴ ص = (٥ × ٥) / ٣ = ٨ ١/٣ سم

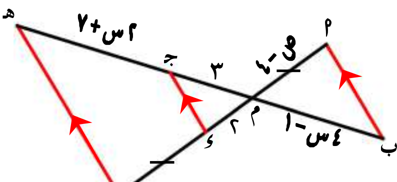
مثال (٤)

فى الشكل المجاور :

أب // جـ ء // هـ و

، أم = ء و

احسب قيمة س ، ص العددية .



الحل

∵ أب // جـ ء // هـ و ، أم = ء و ∴ ب م = جـ هـ

∴ ٤س − ١ = ٢س + ٧ ∴ ٤س − ٢س = ٧ + ١

∴ ٢س = ٨ ⟸ س = ٤

، ب م / م جـ = أم / م ء ∴ (٤س − ١) / ٣ = (ص − ٤) / ٢ ∴ (١٦ − ١) / ٣ = (ص − ٤) / ٢

∴ ٥ / ١ = (ص − ٤) / ٢ ∴ ص − ٤ = ١٠ ⟸ ص = ١٤

تمارين (٦) على نظرية تاليس

• أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المجاور : أب جـ ء شبه منحرف فيه : أء // ب جـ ، رُسم هـ و // ب جـ فإن : ء هـ = ... سم .

(أ) ٢١ (ب) ٤٤ (جـ) ٣٣ (ء) ٢٢

(٢) فى الشكل المجاور : أأ' = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (ء) ١٦

(٣) فى الشكل المجاور : ثلاثة مستقيمات متوازية ، أطوال جزأى أحد القاطعين متساوية فإن : ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (ء) ٦

(٤) فى الشكل المجاور : أب // جـ ء فإن : أم × جـ ب = ... × ......

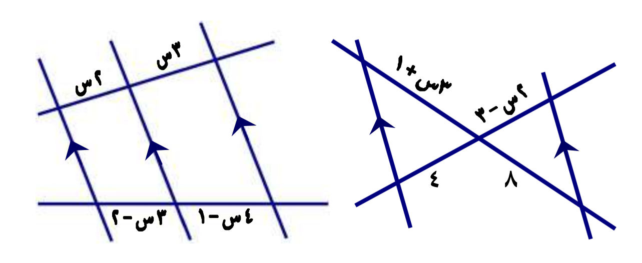
(أ) م جـ × جـ ء (ب) م ء × أء

(جـ) ب م × أء (ء) أم × م ء

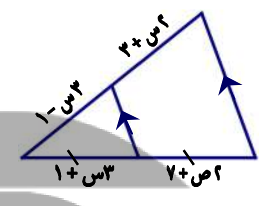


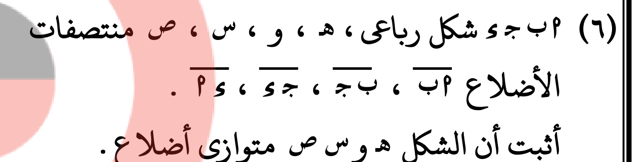
• أجب عن الأسئلة الآتية :

(٥) فى كل من الأشكال الآتية احسب قيم س ، ص العددية (الأطوال مقاسة بالسنتيمترات) .



شكل (١) شكل (٢)





شكل (٣) شكل (٤)

(٦) ا ب جـ ء شكل رباعى ، هـ ، و ، س ، ص منتصفات الأضلاع $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{جـء}}$ ، $\overline{\text{ءا}}$.
أثبت أن الشكل هـ و س ص متوازى أضلاع .

(٧) $\overleftrightarrow{\text{اب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـء}} = \{\text{هـ}\}$ ، س $\in \overline{\text{اب}}$ ، ص $\in \overline{\text{جـء}}$ ، وكان : $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بء}} \parallel \overline{\text{اجـ}}$. أثبت أن : ا س × هـ ء = جـ ص × هـ ب

(٢) منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

• **نظرية :**

إذا نصفت زاوية رأس مثلث (أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس) وقسم المنصف قاعدة المثلث إلى جزأين فإن النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين .

فى الشكل التالى :
$\overline{\text{اء}}$ ينصف ∠ ا من الداخل كما فى الشكل الأول ، من الخارج كما فى الشكل الثانى . فإن :

$$\frac{\text{بء}}{\text{جـء}} = \frac{\text{اب}}{\text{اجـ}}$$

والعكس صحيح .

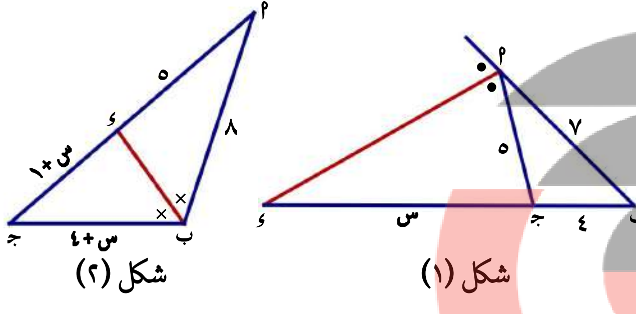
فإذا كان : $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{با}}{\text{اجـ}}$ فإن : $\overline{\text{اء}}$ ينصف ∠ ا .

• **ملاحظة هامة :**

لسهولة كتابة التناسب صحيحاً :
إذا كان منصف ∠ ا هو $\overline{\text{اء}}$ فإننا نبدأ التناسب من (ا) لضلعين المثلث فنقول $\frac{\text{اب}}{\text{اجـ}}$ ثم نبدأ من (ء) لأجزاء القاعدة فنقول $\frac{\text{ءب}}{\text{ءجـ}}$ مع ملاحظة تساوى النهايات فى النسبتين .

مثال (٥)

فى الشكلين التاليين أوجد قيمة س (الأطوال مقاسة بالسم)



شكل (١) شكل (٢)

الحل

شكل (١) :

∵ $\overline{\text{اء}}$ ينصف ∠ ا الخارجة ∴ $\frac{\text{با}}{\text{اجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{جـء}}$

∴ $\frac{٧}{٥} = \frac{\text{س}+٤}{\text{س}}$ ∴ ٧ س = ٥ س + ٢٠

∴ ٧ س − ٥ س = ٢٠

∴ ٢ س = ٢٠ ⇐ س = ١٠ سم

شكل (٢) :

∵ $\overline{\text{بء}}$ ينصف ∠ ب ∴ $\frac{\text{با}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{ءا}}{\text{ءجـ}}$

∴ $\frac{٨}{\text{س}+٤} = \frac{٥}{\text{س}+١}$

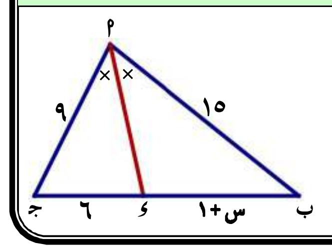
∴ ٨ س + ٨ = ٥ س + ٢٠

∴ ٨ س − ٥ س = ٢٠ − ٨

∴ ٣ س = ١٢ ⇐ س = ٤ سم

(تدريب)

فى الشكل المجاور :
أوجد قيمة س العددية .



مثال (٦)

أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسم أ ء ينصف ∠ أ ويقطع ب ج فى ء . فإذا كان : ب ء = ٢٤ سم ، أ ب : أ ج = ٣ : ٥ فأوجد محيط △ أ ب ج .

الحل

∵ أ ء ينصف ∠ أ

∴ $\frac{\text{ء ج}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{ء ج}}{٢٤} = \frac{٥}{٣}$

∴ ء ج = $\frac{٥ \times ٢٤}{٣}$ = ٤٠ سم

، بفرض أن أ ب = ٣ س ، أ ج = ٥ س

، ∵ △ أ ب ج قائم الزاوية فى ب :

∴ (أ ج)² = (أ ب)² + (ب ج)² (فيثاغورث)

∴ ٢٥ س² = ٩ س² + (٤٠ + ٢٤)² ∴ ١٦ س² = (٦٤)²

∴ (٤ س)² = (٦٤)² ∴ ٤ س = ٦٤ ⇐ س = ١٦ سم

∴ أ ب = ٣ × ١٦ = ٤٨ سم ، أ ج = ٥ × ١٦ = ٨٠ سم

، محيط △ أ ب ج = ٦٤ + ٤٨ + ٨٠ = ١٩٢ سم

(تدريب)

أ ب ج مثلث . رسم ب ء ينصف ∠ ب ويقطع أ ج فى ء حيث أ ء = ١٤ سم ، ء ج = ١٨ سم . إذا كان محيط △ أ ب ج = ٨٠ سم فأوجد طول كل من : ب ج ، أ ب .

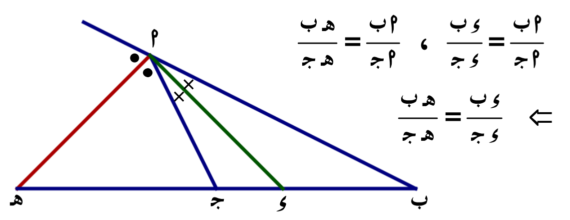
• ملاحظات هامة :

(١) إذا وُجد منصفان لزاوية أ الداخلة والخارجة

أ ء منصف داخلى ، أ هـ منصف خارجى فإن :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ء ج}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ج}}$

⇐ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء ج}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ج}}$



(٢) المنصفان لزاوية رأس المثلث الداخلة والخارجة متعامدان .

(٣) منصف زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين يوازى القاعدة .

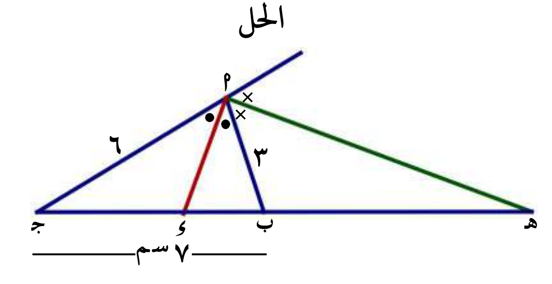
مثال (٧)

أ ب ج مثلث فيه أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٧ سم ، ج أ = ٦ سم . رسم أ ء ينصف ∠ أ ويقطع ب ج فى ء ، ورسم أ هـ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع ج ب فى هـ .

(أ) أثبت أن أ ب متوسط فى △ أ ج هـ .

(ب) أوجد النسبة بين مساحة △ أ ء هـ ومساحة △ أ ج هـ .

الحل



∵ أ ء ينصف ∠ أ ، أ هـ ينصف ∠ أ الخارجة

∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء ج}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$ ∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء ج}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ج}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

(أ) $\frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ج}} = \frac{١}{٢}$ ⇐ $\frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ب} + ٧} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ هـ ب = هـ ب + ٧ ⇐ هـ ب = ٧ سم

∴ هـ ب = ب ج ∴ أ ب متوسط فى △ أ ج هـ

(ب) $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء ج}} = \frac{١}{٢}$ ⇐ $\frac{\text{ء ب}}{٧ - \text{ء ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ ء ب = ٧ − ء ب ∴ ٣ ء ب = ٧ ∴ ء ب = $\frac{٧}{٣}$ سم

△ △ أ ء هـ ، أ ج هـ متساويان فى الارتفاع (مشتركان فى الرأس)

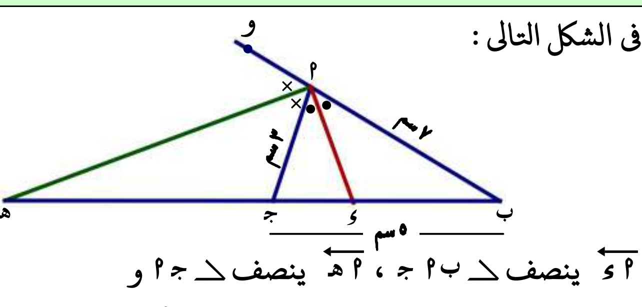
∴ النسبة بين مساحتيهما تساوى النسبة بين طولى قاعدتيهما

∴ م (△ أ ء هـ) : م (△ أ ج هـ) = ء هـ : ج هـ

= (٧ + $\frac{٧}{٣}$) : ١٤ = $\frac{٢٨}{٣}$: ١٤ = ٢ : ٣

(تدريب)

فى الشكل التالى :



أ ء ينصف ∠ ب أ ج ، أ هـ ينصف ∠ ج أ و ، أ ب = ٧ سم ، أ ج = ٣ سم ، ب ج = ٥ سم أوجد طول ء هـ .

• طول المنصفان الداخلى والخارجى لزاوية رأس مثلث :

(١) إذا كان $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ من الداخل ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ء فإن : أ ء = $\sqrt{أ ب \times أ جـ - ء ب \times ء جـ}$

(٢) إذا كان $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ من الخارج ويقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ فإن : أ هـ = $\sqrt{هـ ب \times هـ جـ - أ ب \times أ جـ}$

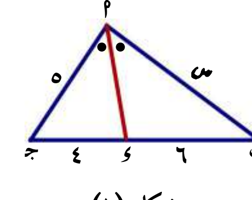
• ملاحظات هامة :

(١) فى التنصيف من الداخل نبدأ بالضلعين بينما فى التنصيف من الخارج نبدأ بجزأى القاعدة .

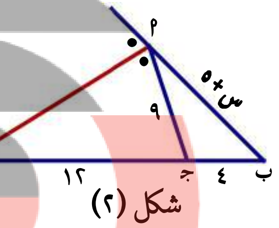
(٢) منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة .

مثال (٨)

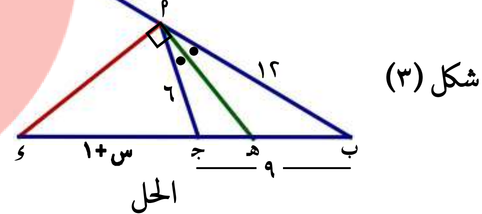
فى كل من الأشكال الآتية احسب قيمة س وطول $\overline{أ ء}$:



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

شكل (١) :

∵ $\overline{أ ء}$ ينصف ∠ أ ∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ب ء}{ء جـ}$

∴ $\frac{س}{٥} = \frac{٦}{٤}$ ∴ س = $\frac{٥ \times ٦}{٤}$ = ٧,٥

، أ ء = $\sqrt{أ ب \times أ جـ - ء ب \times ء جـ} = \sqrt{٧,٥ \times ٥ - ٦ \times ٤}$

= $\frac{٣}{٢}\sqrt{٦}$ = ٣,٧ تقريباً

شكل (٢) :

∵ $\overline{أ ء}$ ينصف ∠ أ من الخارج ∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ب ء}{ء جـ}$

∴ $\frac{س + ٥}{٩} = \frac{١٦}{١٢}$ ∴ $\frac{س+٥}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٣ س + ١٥ = ٣٦

∴ ٣ س = ٣٦ – ١٥ ∴ ٣ س = ٢١ ⇐ س = ٧

، أ ء = $\sqrt{ء ب \times ء جـ - أ ب \times أ جـ}$

= $\sqrt{١٦ \times ١٢ - (٧ + ٥) \times ٩}$

= $٢\sqrt{٢١}$ = ٩,٢ تقريباً

شكل (٣) :

∵ $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الداخلة ، ∵ $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp \overleftrightarrow{أ ء}$

∴ $\overline{أ ء}$ ينصف ∠ أ من الخارج

∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ء ب}{ء جـ}$ ∴ $\frac{١٢}{٦} = \frac{(س+١) + ٩}{س + ١}$ ∴ $\frac{٢}{١} = \frac{س + ١٠}{س + ١}$

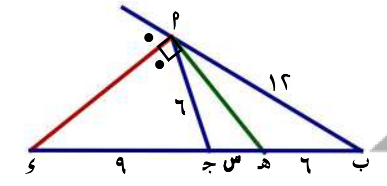
∴ ٢ س + ٢ = س + ١٠ ⇐ س = ٨

، أ ء = $\sqrt{ء ب \times ء جـ - أ ب \times أ جـ} = \sqrt{١٨ \times ٩ - ١٢ \times ٦}$

= $٣\sqrt{١٠}$ = ٩,٥ تقريباً

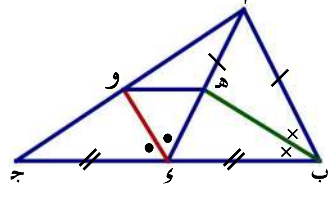
(تدريب)

فى الشكل التالى احسب قيمة س وطول كل من : $\overline{أ ء}$ ، $\overline{أ هـ}$



مثال (٩)

فى الشكل المجاور :



أثبت أن : $\overline{هـ و} // \overline{ب جـ}$

الحل

فى △ ء ب أ : ∵ $\overline{ب هـ}$ ينصف ∠ ب ∴ $\frac{ب أ}{ب ء} = \frac{أ هـ}{هـ ء}$

ولكن : ب أ = أ ء ، ب ء = ء جـ ∴ $\frac{أ ء}{ء جـ} = \frac{أ هـ}{هـ ء}$ .... (١)

، فى △ أ ء جـ : ∵ $\overline{ء و}$ ينصف ∠ ء ∴ $\frac{أ ء}{ء جـ} = \frac{أ و}{و جـ}$ ..... (٢)

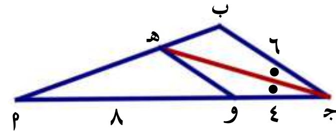
من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{أ هـ}{هـ ء} = \frac{أ و}{و جـ}$ ⇐ $\overline{هـ و} // \overline{ب جـ}$

(تدريب)

فى الشكل المجاور :

(الأطوال مقاسة بالسم)

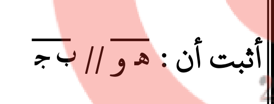
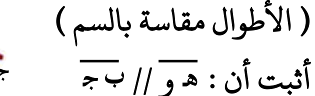
أثبت أن : $\overline{هـ و} // \overline{ب جـ}$



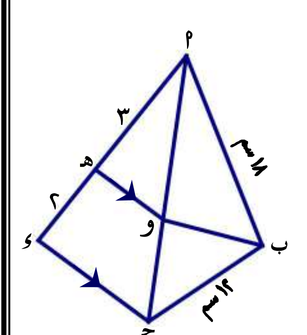
مثال (١٠)

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ١٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم . هـ ∈ $\overline{أ ء}$ بحيث ٢ أ هـ = ٣ هـ ء . رسم $\overleftrightarrow{هـ و} \perp \overline{ء جـ}$ قطع $\overline{أ جـ}$ فى و .

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ب و}$ ينصف ∠ أ ب جـ .

الحل



فى △ ا جـ ى :

∵ $\overline{هـ و} // \overline{جـ ى}$

∴ $\frac{ا و}{و جـ} = \frac{ا هـ}{هـ ى}$

∴ $\frac{ا و}{و جـ} = \frac{٣}{٢}$ .... (١)

، $\frac{ا ب}{جـ ب} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$ .... (٢)

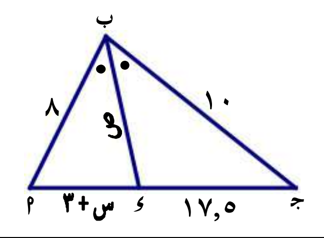
من (١)، (٢) : ∴ $\frac{ا ب}{ب جـ} = \frac{ا و}{و جـ}$ ⇐ $\overleftrightarrow{ب و}$ ينصف ∠ ب



تمارين (٧) على منصفا الزاوية

• أكمل ما يأتى :

(١) فى الشكل المجاور : $\overleftrightarrow{ا ى}$ ينصف ∠ ا فإن :



(ا) $\frac{ب ى}{ى جـ} =$ ....

(ب) $\frac{ا جـ}{ا ب} =$ ....

(جـ) $\frac{ب ى}{ب ا} =$ ....

(ى) ا ب × جـ ى = ...

(٢) المنصفان الداخلى والخارجى لأى زاوية من زوايا مثلث يكونان ....

(٣) فى المثلث المتساوى الساقين منصف الزاوية الخارجة عند رأس المثلث يكون .... القاعدة.

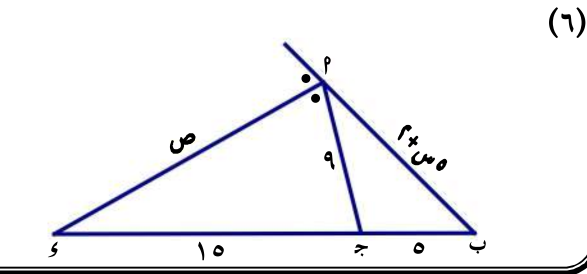
(٤) فى △ ا ب جـ إذا كان $\overline{ا ى}$ ينصف ∠ ب ا جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ وكان ا جـ > ا ب فإن : ب ى .... ى جـ .

• أجب عن الأسئلة الآتية :

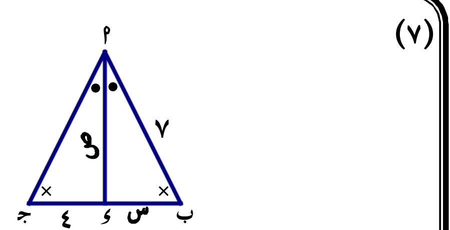
فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س ، ص ثم أوجد محيط △ ا ب جـ :

(٥)

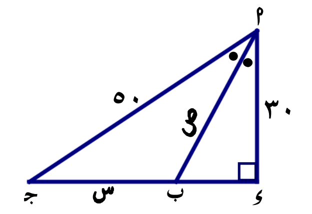
(٦)



(٧)

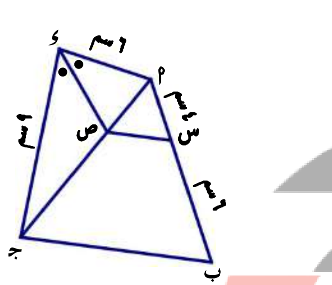


(٨)



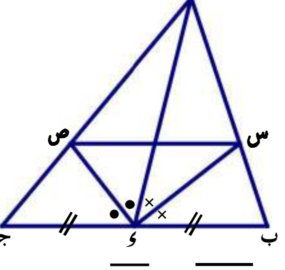
• فى الشكلين التاليين : أثبت أن : $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$

(٩)



(١٠)

(١١) فى الشكل المجاور :



$\overline{ا ى}$ متوسط فى △ ا ب جـ

$\overrightarrow{ى س}$ ينصف ∠ ا ى ب

ويقطع $\overline{ا ب}$ فى س

$\overrightarrow{ى ص}$ ينصف ∠ ا ى جـ

ويقطع $\overline{ا جـ}$ فى ص . أثبت أن : $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$

(١٢) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٢٧ سم ، ا جـ = ١٥ سم . رسم $\overleftrightarrow{ا ى}$ ينصف ∠ ا ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ى . إذا كان ب ى = ١٨ سم احسب طول $\overline{ا ى}$.

(١٣) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨ سم ، ا جـ = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم ، رسم $\overleftrightarrow{ا ى}$ ينصف ∠ ا ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ى ، ورسم $\overleftrightarrow{ا هـ}$ ينصف ∠ ا الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ .

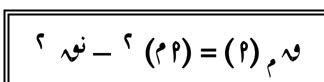
أوجد طول كل من $\overline{ى هـ}$ ، $\overline{ا ى}$ ، $\overline{ا هـ}$

(١٤) أ ب جـ مثلث ، ء ∈ ب جـ ، ء ∉ ب جـ حيث جـ ء = أ ب .
رسم جـ هـ // ء أ ويقطع أ ب فى هـ ، ورسم هـ و // ب جـ
ويقطع أ جـ فى و . أثبت أن : ب و ينصف ∠ أ ب جـ .

(٣) تطبيقات التناسب فى الدائرة

• قوة نقطة بالنسبة لدائرة :

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م
التى طول نصف قطرها نق هو
العدد الحقيقى ق م (أ) حيث :



ق م (أ) = (م أ)² – نق²

• تحديد موقع النقطة أ بالنسبة للدائرة م :

(١) إذا كانت ق م (أ) > ٠ فإن أ تقع خارج الدائرة
(٢) إذا كانت ق م (أ) = ٠ فإن أ تقع على الدائرة
(٣) إذا كانت ق م (أ) < ٠ فإن أ تقع داخل الدائرة

مثال (١١)

حدد موقع كل من النقط أ ، ب ، جـ بالنسبة للدائرة ن التى طول نصف قطرها ٣ سم ، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة فى كل من الحالات الآتية :

(أ) ق ن (أ) = ١٥ (ب) ق ن (ب) = ٠
(جـ) ق ن (جـ) = –٤

الحل

(أ) ق ن (أ) = ١٥ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة ن
∵ ق ن (أ) = (ن أ)² – نق² ∴ ١٥ = (ن أ)² – ٩ ⇐ ن أ = ٤ سم
(ب) ق ن (ب) = ٠ ∴ ب تقع على الدائرة ن
(جـ) ق ن (جـ) = –٤ < ٠ ∴ جـ تقع داخل الدائرة ن
∴ –٤ = (ن جـ)² – ٩ ∴ ن جـ = √٥ سم

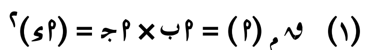
(تدريب)

حدد موقع كل من النقط أ ، ب ، جـ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم ، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة فى كل من الحالات الآتية :

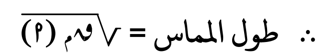
(أ) ق م (أ) = ١١ (ب) ق م (ب) = ٠
(جـ) ق م (جـ) = –١٦

• ملاحظات هامة :

فى شكل المجاور :



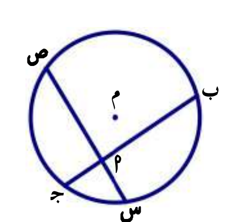
(١) ق م (أ) = أ ب × أ جـ = (أ ء)²



∴ طول المماس = √ق م (أ)

(٢) ق م (أ) = أ س × أ ص = (أ ء)²

فى الشكل المجاور :

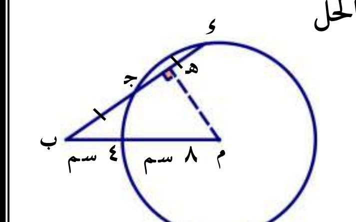


(٣) ق م (أ) = – أ ب × أ جـ
= – أ س × أ ص

مثال (١٢)

الدائرة م طول نصف قطرها ٨ سم . النقطة ب تبعد ١٢ سم عن مركز الدائرة ، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة فى نقطتين جـ ، ء حيث جـ ب = جـ ء .
احسب طول الوتر جـ ء وبعده عن المركز م .

الحل



ق م (ب) =
(ب م)² – نق² = ب جـ × ب ء
∴ ١٤٤ – ٦٤ = ٢ جـ ء × جـ ء
∴ ٢ (جـ ء)² = ٨٠ ∴ جـ ء = √٤٠ = ٢√١٠ سم
ولحساب بعد الوتر عن المركز نرسم م هـ ⊥ جـ ء
ق م (هـ) = (هـ م)² – نق² = – هـ جـ × هـ ء
∴ (هـ م)² – (٨)² = – √١٠ × √١٠
∴ (هـ م)² = – ١٠ + ٦٤ = ٥٤ ∴ هـ م = ٣√٦ سم .

• المحور الأساسى لدائرتين مختلفتين :

هو مجموعة النقاط التى لها نفس القوة بالنسبة للدائرتين .
أى أن : ق م (أ) = ق ن (أ) ⇐ أ ∈ المحور الأساسى للدائرتين م ، ن .

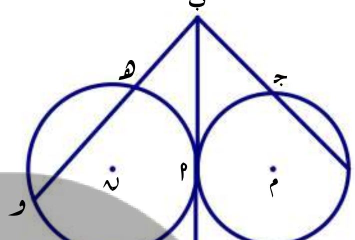
مثال (١٣)

الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج في ؟ ، $\overleftrightarrow{؟ب}$ مماس مشترك لهما ، $\overleftrightarrow{بج}$ يقطع الدائرة م في ج ، ء ، $\overleftrightarrow{به}$ يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب .

(؟) أثبت أن : $\overleftrightarrow{؟ب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن .

(ب) إذا كان : ق م (ب) = ٣٦ ، ب ج = ٤ سم ، هـ و = ٩ سم . أوجد طول كل من $\overline{جء}$ ، $\overline{؟ب}$ ، $\overline{به}$.

الحل



(؟) ∵ ق م (ب) = (ب؟)^2

، ق ن (ب) = (ب؟)^2

∴ ق م (ب) = ق ن (ب)

، ق م (؟) = ق ن (؟) = ٠

(لأن كل منهما تقع على الدائرة)

∴ $\overleftrightarrow{؟ب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن .

(ب) ∵ ق م (ب) = ب ج × ب ء ∴ ٣٦ = ٤ (٤ + ج ء)

∴ ٩ = ٤ + ج ء ⇐ ج ء = ٥ سم

، ق م (ب) = (ب؟)^2 ∴ (ب؟)^2 = ٣٦ ⇐ ب؟ = ٦ سم

، ب هـ × ب و = ٣٦ ∴ ب هـ (ب هـ + ٩) = ٣٦

∴ (ب هـ)^2 + ٩ ب هـ − ٣٦ = ٠ ∴ (ب هـ + ١٢) (ب هـ − ٣) = ٠

∴ ب هـ = ٣ سم والجواب الآخر مرفوض .

(تدريب)

دائرتان م ، ن متقاطعتان في ؟ ، ب ، ج ∈ $\overleftrightarrow{؟ب}$ ، ج ∉ $\overline{؟ب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{جء}$ فقطع الدائرة م في ء ، هـ حيث ج ء = ٩ سم ، ء هـ = ٧ سم ، ورسم $\overleftrightarrow{جو}$ يمس الدائرة ن عند و .

(أ) أثبت أن : ق م (ج) = ق ن (ج) .

(ب) إذا كان ؟ ب = ١٠ سم . أوجد طول كل من $\overline{؟ج}$ ، $\overline{جو}$.

• تذكر أن :

(١) الفرق بين قياس القوس ، وطول القوس :

ق ($\overset{\frown}{؟ب}$) : هو قياس الزاوية المركزية التي قوسها $\overset{\frown}{؟ب}$

، طول ($\overset{\frown}{؟ب}$) : هو طول المنحنى من ؟ إلى ب بفرض شده ليصبح خط مستقيم .

(٢) العلاقة بين طول القوس وقياسه :

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط دائرته}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$$

حيث قياس الدائرة = ٣٦٠°

(٣) إذا تقاطع قاطعان داخل الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس .

فإذا كان $\overline{؟ب}$ ∩ $\overline{جء}$ = {هـ}

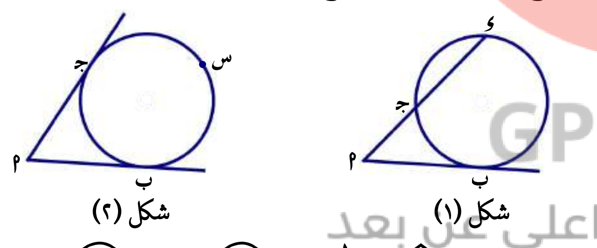
فإن ق (∠ ؟هـج) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{؟ج}$) + ق ($\overset{\frown}{ءب}$)]

(٤) إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوس المقابلين لها .

فإذا كان $\overleftrightarrow{ب؟}$ ∩ $\overleftrightarrow{جء}$ = {هـ}

فإن ق (∠ ؟هـج) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{؟ج}$) − ق ($\overset{\frown}{ءب}$)]

(٥) القاطع والمماس (أو المماسان) لدائرة والمتقاطعان خارج الدائرة يكون قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها .



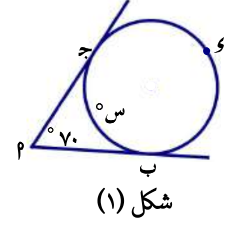
شكل (١)   شكل (٢)

في شكل (١) : ق ($\hat{؟}$) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بء}$) − ق ($\overset{\frown}{بج}$)]

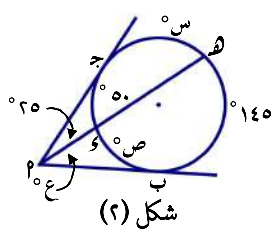
في شكل (٢) : ق ($\hat{؟}$) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بسج}$) − ق ($\overset{\frown}{بج}$)]

مثال (١٤)

في كل من الشكلين التاليين أوجد قيمة س ، ص ، ع :



شكل (١)



شكل (٢)

الحل

شكل (١) :

٧٠° = $\frac{1}{2}$ [ق(ب د جـ) – س – س]   ∴ ١٤٠° = ٣٦٠° – س – س

∴ ٢ س = ٣٦٠ – ١٤٠ = ٢٢٠° ⟸ س = ١١٠°

شكل (٢) :

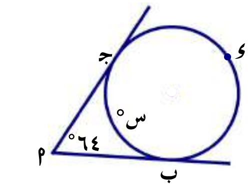
٢٥° = $\frac{1}{2}$ [س – ٥٠]   ∴ س – ٥٠ = ٥٠ ⟸ س = ١٠٠°

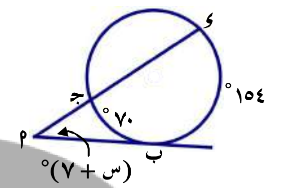
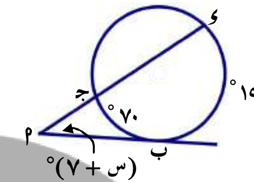
، ص = ٣٦٠° – (١٤٥ + ١٠٠ + ٥٠) = ٦٥°

ع = $\frac{1}{2}$ [١٤٥ – ص] = (١٤٥ – ٦٥) = ٣٠°

(تدريب)

فى كل من الشكلين التاليين أوجد قيمة س :



تمارين (٨) على تطبيقات التناسب فى الدائرة

(١) حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها ١٠ سم ، ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة :

(ﺃ) قم (ﺃ) = –٣٦   (ب) قم (ب) = ٩٦

(جـ) قم (جـ) = صفر

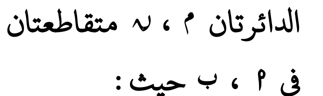
(٢) أوجد قوة النقطة ﺃ حيث م ﺃ = ١٢ سم بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٩ سم .

(٣) أوجد قوة النقطة د حيث د م = $\sqrt{17}$ سم بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٤ سم .

(٤) إذا كان بُعد نقطة عن مركز دائرة يساوى ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة يساوى ٤٠٠ . أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة .

(٥) الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم . ﺃ نقطة تبعد عن مركزها ١٦ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ﺃ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ﺃ ب = ٢ ﺃ جـ احسب طول الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$.

(٦) فى الشكل المجاور :



الدائرتان م ، ن متقاطعتان فى ﺃ ، ب حيث :

$\overleftrightarrow{\text{ﺃ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ = {س}

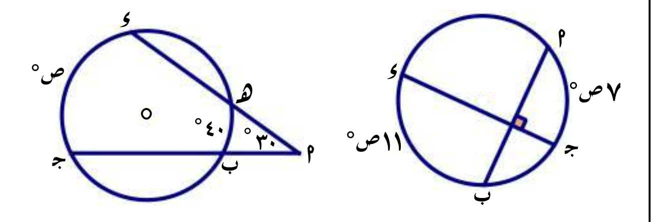
، س د = ٢ د جـ ، هـ و = ١٠ سم ، قن(س) = ١٤٤

(ﺃ) أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ب}}$ محور أساسى للدائرتين م ، ن .

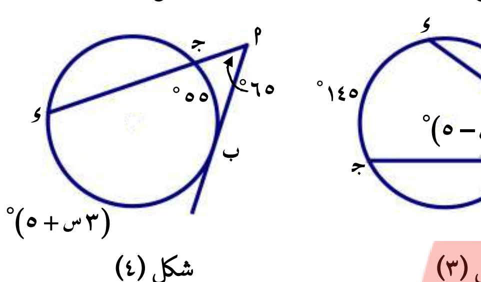
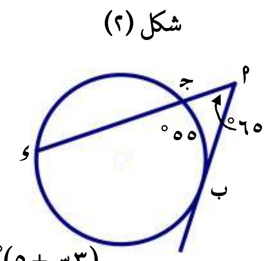
(ب) أوجد طول كل من $\overline{\text{س جـ}}$ ، $\overline{\text{س و}}$.

(جـ) أثبت أن الشكل جـ د و هـ رباعى دائرى .

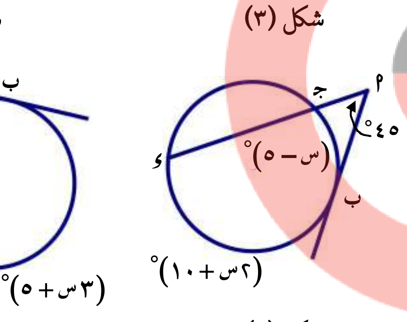
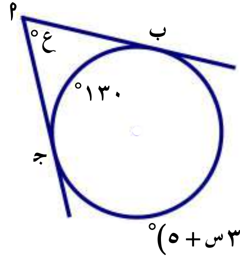
(٧) أوجد الرمز المجهول بالدرجات :



شكل (١)   شكل (٢)

شكل (٣)   شكل (٤)

شكل (٥)   شكل (٦)

(٨) فى الشكل المجاور :

ق($\overset{\frown}{\text{ب ﺃ جـ}}$) = ٣٣°

، ق($\overset{\frown}{\text{ب د جـ}}$) = ٧٠°

، ق($\overset{\frown}{\text{ﺃ ب}}$) = ٩٤°

، ق($\overset{\frown}{\text{جـ ص}}$) = ١٠٠°

أوجد قياس كل من :

(ﺃ) $\overset{\frown}{\text{ﺃ س}}$ (ب) $\overset{\frown}{\text{س ص}}$ (جـ) ∠ ب هـ جـ

تمت بحمد الله



حلول التمارين

تمارين (١)

(١) الثانية لإحتوائها على س^{٢}

(٢) الثانية لإحتوائها على س^{٢}

(٣) الثالثة لإحتوائها على س^{٣}

(٤) ∵ س^{٢} = س ∴ س^{٢} – س = ٠ ∴ س (س – ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ١ ∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ١ }

(٥) المميز = ١ – ٤ × ١ × ٤ = – ١٥ (كمية سالبة > ٠)

∴ مجموعة الحل في ع = ∅

(٦) المميز = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = ٠ – ٤ × ١ × ٣ = – ١٢ > ٠

∴ مجموعة الحل في ع = ∅

(٧) ∵ س^{٢} – ٤ س + ٤ = ٠ ∴ (س – ٢)^{٢} = ٠ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = { ٢ }

(٨) { – ٢ } وهي نقطة تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات

(٩) مجموعة الحل = ∅ (لأن المنحنى لا يقطع محور السينات)

(١٠) مجموعة الحل = { ١ ، – ٣ }

(١١) (ﻫ) ∵ س^{٢} – ٨١ = ٠ ∴ (س – ٩) (س + ٩) = ٠

∴ س = ٩ أ، س = – ٩ ∴ مجموعة الحل = { – ٩ ، ٩ }

(ب) ∵ س^{٢} + ٣ س = ٠ ∴ س (س – ٣) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٣ ∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٣ }

(جـ) ∵ (س + ٢)^{٢} = ٠ ∴ س = – ٢ ∴ س ∈ { – ٢ }

(ء) ∵ س^{٢} = – ٨١ ∴ س = ± $\sqrt{-٨١}$ ∉ ع ∴ س ∈ ∅

(ﻫ) ∵ س (س + ١) (س – ٣) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = – ١ أ،

س = ٣ ∴ مجموعة الحل = { ٠ ، – ١ ، ٣ }

(١٢) (ﻫ) ﻫ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = ٨

المميز = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = ٣٦ – ٤ × ١ × ٨ = ٤ ∴ $\sqrt{\text{المميز}}$ = ٢

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\text{المميز}}}{٢ﻫ}$ = $\frac{-٦ \pm ٢}{٢}$

∴ س$_{١}$ = $\frac{-٦ + ٢}{٢}$ = – ٢ ، س$_{٢}$ = $\frac{-٦ - ٢}{٢}$ = – ٤

(ب) ﻫ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = – ٤

المميز = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = ٩ – ٤ × ٢ × – ٤ = ٤١

∴ س = $\frac{٩ \pm \sqrt{٤١}}{٤}$ ∴ س$_{١}$ = ٣,٩ ، س$_{٢}$ = ٠,٦

(جـ) ﻫ = ٥ ، ب = – ٣ ، جـ = – ١

المميز = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = ٩ – ٤ × ٥ × – ١ = ٢٩

∴ س = $\frac{٩ \pm \sqrt{٢٩}}{١٠}$ ∴ س$_{١}$ = ١,٤ ، س$_{٢}$ = ٠,٤

(١٣) (ﻫ) د (س) = (س + ٦)^{٢} – ١

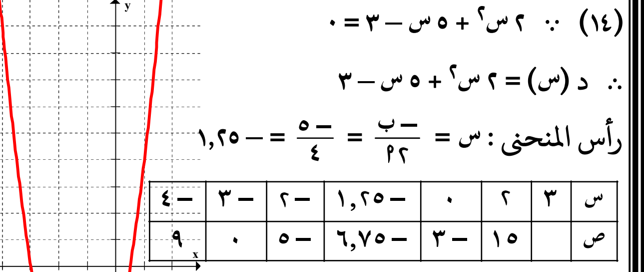
(ب) د (س) = ٢ – (س + ١)^{٢}

(جـ) د (س) = (س – ٣)^{٢} – ٤

(١٤) ∵ ٢ س^{٢} + ٥ س – ٣ = ٠

∴ د (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س – ٣

رأس المنحنى : س = $\frac{-ب}{٢ﻫ}$ = $\frac{-٥}{٤}$ = – ١,٢٥



س	٣	٢	٠	– ١,٢٥	– ٢	– ٣	– ٤
ص		١٥	– ٣	– ٦,٧٥	– ٥	٠	٩

من الرسم :

المنحنى يقطع محور السينات عند

س = $\frac{١}{٢}$ ، س = – ٣

∴ مجموعة الحل = { $\frac{١}{٢}$ ، – ٣ }

التحقيق الجبري :

عندما س = $\frac{١}{٢}$:

الطرف الأيمن = ٢ ($\frac{١}{٢}$)^{٢} + ٥ ($\frac{١}{٢}$) – ٣ = ٠ = الطرف الأيسر

عندما س = – ٣ :

الطرف الأيمن = ٢ (– ٣)^{٢} + ٥ (– ٣) – ٣ = ٠ = الطرف الأيسر

يمكنك عزيزي الطالب التأكد من صحة الحل باستخدام الآلة :

(١) نجعل المعادلة صفرية (على الصورة : ﻫ س^{٢} + ب س + جـ = ٠)

(١) نضغط المفاتيح الآتية : MODE 5 3

(٢) ندخل المعاملات : ﻫ ، ب ، جـ بكتابة كل عدد ثم الضغط على = بعده .

(٣) نضغط = فتظهر قيمة الجذر الأول ثم نضغط = مرة أخرى فتظهر قيمة الجذر الثاني .

(٤) للخروج من النظام والعودة للنظام الأساسي نضغط : MODE 1

تمارين (٢)

(١) ت^{٤٣} = ت$^{٤٠ + ٣}$ = ت^{٣} = – ت

(٢) ت$^{-٤٣}$ = ت$^{٤٤ - ٤٣}$ = ت

(٣) $\frac{٣ - ت}{ت}$ = $\frac{٣ - ت}{ت}$ × $\frac{ت}{ت}$ = $\frac{٣ت - ت^{٢}}{ت^{٢}}$ = $\frac{٣ت + ١}{-١}$ = – ١ – ٣ ت

(٤) مرافق العدد (ت – ٣) هو العدد (– ت – ٣) = – (٣ + ت)

(٥) ع + $\overline{ع}$ = عدد حقيقى

(٦) ع × $\overline{ع}$ = عدد حقيقى

(٧) (أ) $ت^{-٤٥} = ت^{٤٨-٤٥} = ت^{٣}$ = – ت

(ب) $ت^{٤ن+٣} = ت^{٣}$ = – ت

(جـ) $ت^{٤ن-١} = ت^{-١} = ت^{٤-١} = ت^{٣}$ = – ت

(٨) (أ) $\frac{٢}{١+ت} = \frac{٢}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{٢(١-ت)}{١+١}$ = ١ – ت

(ب) $\frac{(٣+ت)(٣-ت)}{٣-٤ت} = \frac{٩+١}{٣-٤ت} \times \frac{٣+٤ت}{٣+٤ت} = \frac{١٠(٣+٤ت)}{٩+١٦}$

= $\frac{٢}{٥}$ (٣ + ٤ت)

(٩) (أ) ∵ $٢س^{٢} + ١٨ = ٠$ بالقسمة على ٢ ∴ $س^{٢} + ٩ = ٠$

∴ $س^{٢} = -٩$ ∴ س = ± $\sqrt{-٩}$ = ± $\sqrt{٩}$ ت = ± ٣ ت

(ب) ∵ $٤ص^{٢} + ٢٠ = ٠$ ∴ $ص^{٢} + ٥ = ٠$ ∴ $ص^{٢} = -٥$

∴ ص = ± $\sqrt{-٥}$ = ± $\sqrt{٥}$ ت

تمارين (٣)

(١) ∵ الجذرين متساويين ∴ المميز ($ب^{٢} - ٤$ أ جـ) = صفر

∴ $(-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times ك = ٠$ ∴ ١٦ – ٤ك = ٠ ⇐ ك = ٤

(٢) ∵ الجذرين حقيقيين مختلفين ∴ المميز > ٠

∴ $(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times م > ٠$ ∴ ٤ – ٤م > ٠ ∴ – ٤م > – ٤

بالقسمة على (–٤) ∴ م < ١

(٣) ∵ الجذرين مركبين غير حقيقيين ∴ المميز < ٠

∴ $(-١٢)^{٢} - ٤ \times ل \times ٩ < ٠$ ∴ ١٤٤ – ٣٦ل < ٠

∴ – ٣٦ل < – ١٤٤ ، بالقسمة على (–٣٦) ∴ ل > ٤

(٤) (أ) ∵ المعادلة من الدرجة الثانية ∴ عدد جذورها = ٢

، المميز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٥ = -١٦ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيان .

(ب) ∵ المعادلة من الدرجة الثانية ∴ عدد جذورها = ٢

، المميز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(-١٠)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢٥ = ٠$

∴ الجذران حقيقيان متساويان .

(جـ) ∵ المعادلة من الدرجة الثانية ∴ عدد جذورها = ٢

، المميز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(-٦)^{٢} - ٤ \times ٢ \times -٥ = ٧٦ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان .

(د) ∵ (س – ١١) – س (س – ٦) = ٠

∴ س – ١١ – $س^{٢}$ + ٦ س = ٠ ∴ $س^{٢}$ – ٧ س + ١١ = ٠

∵ المعادلة من الدرجة الثانية ∴ عدد جذورها = ٢

، المميز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(-٧)^{٢} - ٤ \times ١ \times ١١ = ٥ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان .

(٥) ∵ الجذرين حقيقيين مختلفين ∴ المميز > ٠

∴ $(٤)^{٢} - ٤ \times ٣ \times ك > ٠$ ∴ ١٦ – ١٢ك > ٠ ∴ – ١٢ك > – ١٦

بالقسمة على (–١٢) ∴ ك < $\frac{٤}{٣}$

(٦) ∵ الجذرين متساويين ∴ المميز = ٠

∴ $(-٣)^{٢} - ٤ \times ١ \times (٢ + \frac{١}{ك}) = ٠$

∴ ٩ – ٨ – $\frac{٤}{ك}$ = ٠ ∴ ١ = $\frac{٤}{ك}$ ∴ ك = ٤

(٧) ∵ الجذرين مركبين غير حقيقيين ∴ المميز < ٠

∴ $(-٨)^{٢} - ٤ \times ك \times ١٦ < ٠$ ∴ ٦٤ – ٦٤ك < ٠

∴ – ٦٤ك < – ٦٤ بالقسمة على (–٦٤) ∴ ك > ١

(٨) ∵ الجذرين متساويين ∴ المميز = ٠

∴ $[٢ك - ٢]^{٢} - ٤ \times ١ \times (٢ك + ١) = ٠$

∴ $٤ك^{٢}$ – ٨ك + ٤ – ٨ك – ٤ = ٠ ∴ $٤ك^{٢}$ – ١٦ك = ٠

بالقسمة على ٤ : ∴ $ك^{٢}$ – ٤ك = ٠ ∴ ك (ك – ٤) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = ٤ ⇐ ك ∈ {٠ ، ٤}

(٩) المميز = $(-٤٨)^{٢} - ٤ \times ٣٦ \times ٢٥ = -١٢٩٦ < ٠$

$\sqrt{المميز} = \sqrt{-١٢٩٦}$ = ٣٦ ت

∴ س = $\frac{-(-٤٨) \pm ٣٦ت}{٢ \times ٣٦}$

$س_{١} = \frac{-(-٤٨) + ٣٦ت}{٢ \times ٣٦} = \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢}$ ت ، $س_{٢} = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢}$ ت

تمارين (٤)

(١) بفرض الجذرين هما : ل ، ٢ل

∵ مجموع الجذرين = –(–٣) ∴ ل + ٢ل = ٣ ⇐ ل = ١

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = جـ ∴ ١ × ٢ = جـ ⇐ جـ = ٣

(٢) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر ∴ أ = جـ ∴ أ = ٢

(٣) ∵ أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر ∴ ب = ٠

∴ ب – ٣ = ٠ ⇐ ب = ٣

(٤) مجموع الجذرين = $\frac{-١٩}{٣}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{-١٤}{٣}$

(٥) مجموع الجذرين = –١ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{-٢٥}{٤}$

(٦) ل + م = ٥ ، ل م = ٦

مجموع الجذرين = (ل – ١) + (م – ١) = (ل + م) – ٢

= ٥ – ٢ = ٣

، حاصل ضرب الجذرين = (ل – ١) (م – ١)

= ل م – (ل + م) + ١ = ٦ – ٥ + ١ = ٢

∴ المعادلة المطلوبة هى : س² – ٣ س + ٢ = ٠

حل آخر :

∵ س² – ٥ س + ٦ = ٠ ∴ (س – ٢) (س – ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣ ∴ جذرى المعادلة المطلوبة هما : ١ ، ٢

∴ المعادلة هى : (س – ١) (س – ٢) = ٠ أى : س² – ٣ س + ٢ = ٠

(٧) ∵ س² – ٣ س + ٢ = ٠ ∴ س = ١ أ، س = ٢

∴ جذرى المعادلة المطلوبة هما : ٢ ، ٣

∴ المعادلة هى : (س – ٢) (س – ٣) = ٠ أى : س² – ٥ س + ٦ = ٠

(٨) ∵ س = ٣ أحد الجذرين ∴ د (٣) = ٠

∴ (٣)² + م (٣) – ٢٧ = ٠ ∴ ٣ م = ١٨ ⇐ م = ٦

(٩) ∵ س = –١ أحد الجذرين ∴ د (–١) = ٠

(–١)² – ٢ (–١) + م = ٠ ٣ + م = ٠ ⇐ م = –٣

(١٠) حاصل الضرب = ٣ك/٢ ، مجموع الجذرين = ك + ٤

∴ ٣ك/٢ = ك + ٤ بالضرب × ٢ ∴ ٣ك = ٢ك + ٨ ⇐ ك = ٨

(١١) المعادلة هى : (س – ٥) (س + ٧) = ٠

أى : س² + ٢ س – ٣٥ = ٠

(١٢) مجموع الجذرين = ١ + √٣ ت + ١ – √٣ ت = ٢

، حاصل ضربهما = (١ + √٣ ت) (١ – √٣ ت) = ١ + ٣ = ٤

المعادلة هى : س² – ٢ س + ٤ = ٠

(١٣) ∵ س² – ٧ س – ٨ = ٠ ∴ س = ٨ أ، س = –١

∴ جذرى المعادلة المطلوبة هما : ٩ ، صفر

∴ المعادلة هى : (س – ٩) × س = ٠ أى : س² – ٩ س = ٠

(١٤) ل + م = –٥ ، ل م = ٢

، مجموع الجذرين = ل + م + ٢ = –٥ + ٢ = –٣

، حاصل ضربهما = (ل + ١) (م + ١) = ل م + (ل + م) + ١

= ٢ – ٥ + ١ = –٢ ∴ المعادلة المطلوبة هى : س² + ٣ س – ٢ = ٠

(١٥) ل + م = ٦ ، ل م = ٧

مجموع الجذرين = ٢ ل + ٢ م = ٢ (ل + م) = ٢ × ٦ = ١٢

، حاصل ضربهما = ٢ ل × ٢ م = ٤ ل م = ٤ × ٧ = ٢٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : س² – ١٢ س + ٢٨ = ٠

(١٦) ∵ ١/١٦ س² – ٩ س + ك = ٠ بالضرب × ١٦

∴ س² – ١٤٤ س + ١٦ ك = ٠

بفرض الجذرين هما : ل ، ٣ ل

∴ ل + ٣ ل = ١٤٤ ∴ ٤ ل = ١٤٤ ⇐ ل = ٣٦

∴ الجذران هما : ٣٦ ، ١٠٨ ، ∵ حاصل ضربهما = ١٦ك

∴ ٣٦ × ١٠٨ = ١٦ك ⇐ ك = ٢٤٣

(١٧) ∵ الجذرين متساويين ∴ المميز = صفر

∴ ب² – ٤ أ جـ = ٠ ∴ (–٥)² – ٤ × ٣ × جـ = ٠

∴ ٢٥ – ١٢ جـ = ٠ ⇐ جـ = ٢٥/١٢

∴ ٣ س² – ٥ س + ٢٥/١٢ = ٠ بالضرب × ١٢

∴ ٣٦ س² – ٦٠ س + ٢٥ = ٠ ∴ (٦ س – ٥)² = ٠

∴ س = ٥/٦ ∴ الجذرين هما : ٥/٦ ، ٥/٦ .

تمارين (٥)

(١) د (س) = –٥ إشارتها سالبة فى الفترة ح

(٢) د (س) = س² + ١ إشارتها موجبة فى الفترة ح

(٣) (أ)] ٢ ، ∞ [(ب)] –∞ ، ٢ [

(٤) (أ) {–١ ، ٣} (ب)] –∞ ، –١ [∪] ٣ ، ∞ [

(٥) د (س) موجبة فى ح

(٦) د (س) سالبة فى ح

(٧) د (س) موجبة فى الفترة ح – {٣}

(٨) د (س) سالبة فى الفترة] ٣ ، ٤ [

(٩) د (س) موجبة عندما س > ٢

(١٠) د (س) موجبة عندما س < ٣

(١١) د (س) موجبة فى الفترة] –٢ ، ١ [

(١٢) (أ) د (س) = ٠ عندما س = ٠

، د (س) موجبة عندما س ∈] ٠ ، ∞ [

، د (س) سالبة عندما س ∈] –∞ ، ٠ [

(ب) د (س) = ٠ عندما س = ٠

، د (س) موجبة عندما س ∈ ح – {٠}

(١٣) (أ) د(س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، –٣}

د(س) موجبة عندما س ∈ ح – [–٣ ، ٢]

، د(س) سالبة عندما س ∈]–٣ ، ٢[

(ب) د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٣}{٢}$

، د(س) موجبة عندما س ≠ $\frac{٣}{٢}$

(١٤)

س	–٣	–٢	–١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٠	–٥	–٨	–٩	–٨	–٥	٠	٧

من الرسم :

د(س) = ٠ عندما س ∈ {–٣ ، ٣}

، د(س) موجبة عندما س ∈ ح – [–٣ ، ٣]

، د(س) سالبة عندما س ∈]–٣ ، ٣[

(١٥)

س	–٣	–٢	–١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	–١١	–٤	٢	٤	٥	٤	١	–٤	–١١

ملاحظة : نقط التقاطع مع محور السينات هنا ليس أعداد صحيحة ولتحديدها بدقة نحل المعادلة ٢ س – $س^٢$ + ٤ = ٠ باستخدام الآلة الحاسبة ∴ س = ٣,٢ أو –١,٢

∴ د(س) = ٠ عندما س ∈ {–١,٢ ، ٣,٢}

، د(س) موجبة عندما س ∈]–١,٢ ، ٣,٢[

، د(س) سالبة عندما س ∈ ح – [–١,٢ ، ٣,٢]

(١٦) د(س) = ٠ عندما س = –١ ∴ د(س) موجبة فى]–١ ، ∞[

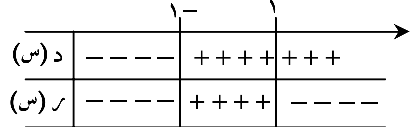
، ر(س) = ٠ عندما س ∈ {–١ ، ١}

∴ ر(س) موجبة فى الفترة]–١ ، ١[

∴ الدالتين د ، ر موجبتين معاً فى الفترة :

]–١ ، ∞[∩]–١ ، ١[=]–١ ، ١[

التوضيح على خط الأعداد :



تمارين (٦)

(١) بوضع س(س – ١) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س = ١

∴ مجموعة الحل هى : [٠ ، –١]

(٢) بوضع $س^٢$ – ١ = ٠ ⇐ س = –١ ، ١

∴ مجموعة الحل هى : ح –]–١ ، ١[

(٣) مجموعة الحل هى : ح – [–١ ، ١]

(٤) مجموعة الحل هى :]–١ ، ١[

(٥) مجموعة الحل هى : [–١ ، ١]

(٦) $س^٢$ – ١٦ ≤ ٠ ، بوضع $س^٢$ – ١٦ = ٠ ∴ س = –٤ ، ٤

∴ مجموعة الحل هى : [–٤ ، ٤]

(٧) بوضع $س^٢$ – ٤ = ٠ ∴ س = –٢ ، ٢

∴ مجموعة الحل هى : [–٢ ، ٢]

(٨) بوضع ٣ س – $س^٢$ = ٠ ∴ $س^٢$ – ٣ س = ٠

∴ س(س – ٣) = ٠ ⇐ س = ٠ ، ٣

∴ مجموعة الحل هى : ح – [٠ ، ٣]

(٩) $س^٢$ + ٧ – ٣ ≤ ٠ ، بوضع $س^٢$ + ٤ = ٠ (ليس لها حل)

∴ مجموعة الحل = ∅ (لأن المقدار موجب دائماً)

(١٠) $س^٢$ + ٧ – ٣ > ٠ ، بوضع $س^٢$ + ٤ = ٠ (ليس لها حل)

∴ مجموعة الحل = ح

(١١) بوضع س(س – ٢) = ٠ ∴ س = ٠ ، ٢

∴ مجموعة الحل =]٠ ، ٢[

(١٢) $س^٢$ + ٢ س – ٣ ≤ ٠ ، بوضع $س^٢$ + ٢ س – ٣ = ٠

∴ (س + ٣)(س – ١) = ٠ ⇐ س = –٣ ، ١

∴ مجموعة الحل = [–٣ ، ١]

(١٣) $س^٢$ – ٤ س + ٤ + ٥ ≤ ٠ ، بوضع $س^٢$ – ٤ س + ٩ = ٠

∵ المميز < ٠ ∴ المعادلة ليس لها حل فى ح

∴ المقدار موجب دائماً ∴ مجموعة الحل = ∅

(١٤) ٣ $س^٢$ + ١٠ س – ٨ ≤ ٠ ، بوضع ٣ $س^٢$ + ١٠ س – ٨ = ٠

∴ (٣ س – ٢)(س + ٤) = ٠ ⇐ س = $\frac{٢}{٣}$ ، –٤

∴ مجموعة الحل = [–٤ ، $\frac{٢}{٣}$]

(١٥) بوضع $س^٢$ – ٤ س + ٤ = ٠ ∴ $(س – ٢)^٢$ = ٠ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = ح

(١٦) بوضع $س^٢ - ٤ س + ٤ = ٠$ ∴ $(س - ٢)^٢ = ٠$ ∴ س = ٢

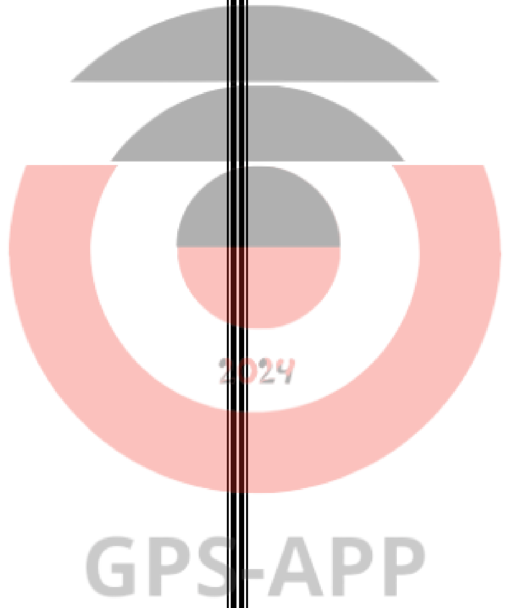
∴ مجموعة الحل = ح – { ٢ }

---

(١٧) بوضع $س^٢ - ٤ س + ٧ = ٠$

، المميز < ٠ ∴ المعادلة ليس لها حل فى ح

∴ المقدار موجب دائماً ∴ مجموعة الحل = ∅



حلول حساب المثلثات

تمارين (١)

(١) ٥٧° ∈ الربع الأول ، ٢٢٠° ∈ الربع الثالث

، −٥٠٠° = −٥٠٠ + (٣٦٠ × ٢) = ٢٢٠° ∈ الربع الثالث

، ٥١٠° − ٣٦٠ = ١٥٠° ∈ الربع الثانى

، −٦٠° + ٣٦٠ = ٣٠٠° ∈ الربع الرابع

، −٣٠٠° + ٣٦٠ = ٦٠° ∈ الربع الأول

(٢) ٦٥° = ٦٥ + ٣٦٠ = ٤٢٥° (زاوية بقياس موجب)

= ٦٥ − ٣٦٠ = −٢٩٥° (زاوية بقياس سالب)

، ١٠٠° = ١٠٠ + ٣٦٠ = ٤٦٠° (زاوية بقياس موجب)

= ١٠٠ − ٣٦٠ = −٢٦٠° (زاوية بقياس سالب)

، ١٤٠° = ١٤٠ + ٣٦٠ = ٥٠٠° (زاوية بقياس موجب)

= ١٤٠ − ٣٦٠ = −٢٢٠° (زاوية بقياس سالب)

، −١٥٠° = −١٥٠ + ٣٦٠ = ٢١٠° (زاوية بقياس موجب)

= −١٥٠ − ٣٦٠ = −٥١٠° (زاوية بقياس سالب)

، −١٨٠° = −١٨٠ + ٣٦٠ = ١٨٠° (زاوية بقياس موجب)

= −١٨٠ − ٣٦٠ = −٥٤٠° (زاوية بقياس سالب)

(٣) القياس السالب = ١٢٠ − ٣٦٠ = −٢٤٠° ∈ الربع الثالث

(٤) القياس الموجب = −٣٠٠ + ٣٦٠ = ٦٠° ∈ الربع الأول

(٥) القياس الموجب = ٤٥ + ٣٦٠ = ٤٠٥°

، القياس السالب = ٤٥ − ٣٦٠ = −٣١٥°

تمارين (٣)

(١) هـ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٢٠}{١٢}$ = ($\frac{٥}{٣}$)^د = ١,٧^د

(٢) نق = ١٥ سم ∴ هـ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٤٥}{١٥}$ = ٣^د

(٣) ل = هـ^د × نق = ٢,٢ × ٢٠ = ٤٤ سم

(٤) نق = $\frac{ل}{هـ^د}$ = $\frac{١٥}{٢}$ = ٧,٥ سم

(٥) (أ) ٦٠° = ٦٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{\pi}{٣}$

(ب) ٢٠٠° = ٢٠٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{١٠\pi}{٩}$

(جـ) −١٦٠° = −١٦٠ + ٣٦٠ = ٢٠٠ = ٢٠٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{١٠\pi}{٩}$

(د) ٦٠٠° = ٦٠٠ − ٣٦٠ = ٢٤٠ = ٢٤٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٤\pi}{٣}$

(هـ) $\frac{٥\pi}{٩}$ = $\frac{٥\pi}{٩}$ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{\pi^٢}{٣٢٤}$

(٦) (أ) ١,٣^د = ١,٣ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٧٤° ٢٦′

(ب) ٤^د = ٤ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٢٢٩° ١١′

(جـ) ٠,٧٢ π^د = ٠,٧٢ × π × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ١٢٩° ٣٦′

(د) ٢,٢^د = ٢,٢ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ١٢٦° ٣′

(هـ) $\frac{٥\pi}{٩}$ = $\frac{٥\pi}{٩}$ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ١٠٠°

(٧) هـ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{١٥}{١٠}$ = ١,٥^د = ١,٥ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٨٥° ٥٧′

(٨) ل = هـ^د × نق = (١٢٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$) × ١٥ = ١٠ π سم

(٩) نق = $\frac{ل}{هـ^د}$ = $\frac{٢٥}{١,٤}$ = ١٧,٩ سم ، س° = ١,٤ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٨٠° ١٣′

(١٠) ق(⌒ب) = ١,٣ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٧٤° ٢٩′ = ٧٤°

∴ ق(⌒جـ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٤) = ٣٦° = ٣٦ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{\pi}{٥}$ = ٠,٦٣^د

(١١) (أ) الزاوية النصف قطرية : هي زاوية مركزية تحصر قوس طوله = طول نصف قطر الدائرة .

(ب) $\frac{س°}{هـ^د}$ = $\frac{١٨٠}{\pi}$

تمارين (٢)

(١) ∵ ١١٠° ∈ الربع الثانى ∴ جا ١١٠° كمية موجبة

، ∵ ١٢٠° ∈ الربع الثانى ∴ جتا ١٢٠° كمية سالبة

، ∵ ٣١٥° ∈ الربع الرابع ∴ ظا ٣١٥° كمية سالبة

، ∵ ٤٥° ∈ الربع الأول ∴ قا ٤٥° كمية موجبة

، ∵ −٣٠٠° = −٣٠٠ + ٣٦٠ = ٦٠° ∈ الربع الأول

∴ ظا −٣٠٠° كمية موجبة

، ∵ ٥٠٠° = ٥٠٠ − ٣٦٠ = ١٤٠° ∈ الربع الثانى

∴ قتا ٥٠٠° كمية موجبة

، ∵ ٤٢٠° = ٤٢٠ − ٣٦٠ = ٦٠° ∈ الربع الأول

∴ ظتا ٤٢٠° كمية موجبة .

(٢) س = ٢,٤ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ١٣٧,٥ = ١٣٨° ∈ الربع الثانى

∴ جا س = جا ١٣٨ كمية موجبة

، جتا س = جتا ١٣٨ كمية سالبة

، ظا ٢ س = ظا (٢ × ١٣٨) = ظا ٢٧٦ ∈ الربع الرابع (كمية سالبة)

(٣) ∵ ٩٠ < θ < ١٨٠ ∴ جا θ موجبة

، جتا θ = −$\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = −$\frac{٤}{٣}$

٥ ٤ ٣ θ

(٤) ∵ (−س ، $\frac{١}{٢}$) ∈ دائرة الوحدة ∴ (س)² + ($\frac{١}{٢}$)² = ١

∴ س² + $\frac{١}{٤}$ = ١ ∴ س² = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ النقطة هى $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢})$ ∴ جتاهـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{١}{٢}$

، ظاهـ = جاهـ ÷ جتاهـ = $\frac{١}{٢} ÷ \frac{-\sqrt{٣}}{٢} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ، قتاهـ = $\frac{١}{جاهـ}$ = ٢

(٥) ∵ (س ، ٣ س) ∈ دائرة الوحدة ∴ $س^٢ + ٩ س^٢ = ١$

∴ $١٠ س^٢ = ١$ ∴ $س^٢ = \frac{١}{١٠}$ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}} = \frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$

∴ جـ $(\frac{\sqrt{١٠}}{١٠} ، \frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠})$ ∴ جتاهـ = $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ ، جاهـ = $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$

، ظتاهـ = جتاهـ ÷ جاهـ = $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠} ÷ \frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠} = \frac{١}{٣}$

(٦) ∵ $(س ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ ∈ دائرة الوحدة ∴ $س^٢ + (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ = ١$

∴ $س^٢ + \frac{١}{٢} = ١$ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

∴ جـ $(\frac{-١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ ∴ جتا جـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، جا جـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، ظا جـ = $-١ = -١$ ، قا جـ = $-\sqrt{٢}$ ، قتا جـ = $\sqrt{٢}$ ، ظتا جـ = -١

(٧) جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا أ = $\frac{٣}{٤}$

، قا أ = $\frac{٥}{٤}$ ، قتا أ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا أ = $\frac{٤}{٣}$

(٨) ∵ (س ، س) ∈ دائرة الوحدة ∴ $س^٢ + س^٢ = ١$

∴ $٢ س^٢ = ١$ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$

∴ جتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظاهـ = ١

(٩) المقدار = جتا ٩٠ جتا ٠ + جا ٢٧٠ جا ٩٠ = ٠ × ١ + ٠ × ١ = ٠

(١٠) (أ) الطرف الأيمن = ١ − ٢ $(جا ٩٠)^٢$ = ١ − ٢ $(١)^٢$ = −١

، الطرف الأيسر = جتا ١٨٠ = −١ ∴ الطرفان متساويان

(ب) الطرف الأيمن = جتا ٩٠ = ٠

، الطرف الأيسر = $(جتا ٤٥)^٢ - (جا ٤٥)^٢ = (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ - (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$

= $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$ = ٠ ∴ الطرفان متساويان .

تمارين (٤)

(١) (أ) جا ١٣٥ = جا (١٨٠ − ٤٥) = جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(ب) ظا ١٢٠ = ظا (١٨٠ − ٦٠) = − ظا ٦٠ = $-\sqrt{٣}$

(جـ) قا ٣٠٠ = قا (٣٦٠ − ٦٠) = قا ٦٠ = ٢

(د) جا س = جا ص ⇐ س = ص أو س + ص = ١٨٠

(٢) جا ٤٢٠ = جا (٤٢٠ − ٣٦٠) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جا ١٢٠ = جا (١٨٠ − ٦٠) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جتا ١٢٠ = جتا (١٨٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠ = $\frac{-١}{٢}$

، جا (−٣٩٠) = جا (−٣٩٠ + ٢ × ٣٦٠) = جا ٣٣٠

= جا (٣٦٠ − ٣٠) = − جا ٣٠ = $\frac{-١}{٢}$

∴ المقدار = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} × \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{-١}{٢} × \frac{-١}{٢} = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

(٣) جتا ١٢٠ = جتا (١٨٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠ = $\frac{-١}{٢}$

ظا ٣١٥ = ظا (٣٦٠ − ٤٥) = − ظا ٤٥ = −١

، جا ٢٤٠ = جا (١٨٠ + ٦٠) = − جا ٦٠ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

، ظتا ١٢٠ = ظتا (١٨٠ − ٦٠) = − ظتا ٦٠ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

، ظا ١٣٥ = ظا (١٨٠ − ٤٥) = − ظا ٤٥ = −١

جا ٩٠ = ١

∴ المقدار = $\frac{-١}{٢} × (-١) + \frac{-\sqrt{٣}}{٢} × \frac{-١}{\sqrt{٣}} - (-١) × ١$

= $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ١ = ٢$

(٤) $جتا^٢ ١٨٠ = (جتا ١٨٠)^٢ = (-١)^٢ = ١$

، جا ٣٣٠ = جا (٣٦٠ − ٣٠) = − جا ٣٠ = $\frac{-١}{٢}$

، جتا ١٢٠ = جتا (١٨٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠ = $\frac{-١}{٢}$

، ظا (−٣١٥) = ظا (−٣١٥ + ٣٦٠) = ظا ٤٥ = ١

∴ المقدار = $١ + \frac{-١}{٢} + \frac{-١}{٢} - ١ = -١$

(٥) ∵ جا ١٥ = جتا (هـ + ١٥) ∴ ١٥ + هـ + ١٥ = ٩٠

⇐ هـ = ٦٠ ∴ $جا^٢ هـ = (جا ٦٠)^٢ = (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{٣}{٤}$

، $جتا^٢ (١٨٠ - هـ) = جتا^٢ (١٨٠ - ٦٠) = (- جتا ٦٠)^٢ = (\frac{-١}{٢})^٢$

= $\frac{١}{٤}$

، ظا ١٣٥ = ظا (١٨٠ − ٤٥) = − ظا ٤٥ = −١

، جا ١٨٠ = ٠ ∴ المقدار = $\frac{\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}}{-١ + ٠} = -١$

(٦) ∵ ظا س = ظتا ٢ س ∴ س + ٢ س = ٩٠ ⇐ س = ٣٠

$جتا^٢ (٩٠ - س) = جتا^٢ (٩٠ - ٣٠) = (جتا ٦٠)^٢ = (\frac{١}{٢})^٢ = \frac{١}{٤}$

، جتا ٢ س = جتا ٢ × ٣٠ = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

، جا ٣ س = جا (٣ × ٣٠) = جا ٩٠ = ١

∴ المقدار = $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٤}$

(٧) جا ١٥٠ = جا (١٨٠ − ٣٠) = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

، جتا ١٢٠ = جتا (١٨٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠ = $\frac{-١}{٢}$



، جا ٦٠٠ = جا (٦٠٠ – ٣٦٠) = جا ٢٤٠ = جا (١٨٠ + ٦٠) = – جا ٦٠ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

، جتا ٣٣٠ = جتا (٣٦٠ – ٣٠) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ١٨٠ = –١

الطرف الأيمن = $\frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٢} + \frac{-\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -١$

الطرف الأيسر = –١ ⇐ الطرفان متساويان

---

(٨) جا ٣١٥ = جا (٣٦٠ – ٤٥) = – جا ٤٥ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

، جتا (–٦٧٥) = جتا (–٦٧٥ + ٣٦٠ × ٢) = جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

قا² ٣٠٠ = قا² (٣٦٠ – ٦٠) = (قا ٦٠)² = ٤

المقدار = $\frac{-١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٤ = \frac{٧}{٢}$

---

(٩) (أ) ∵ جا ٣θ = جتا θ ∴ ٣θ ± θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

إما ٣θ + θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن ∴ ٤θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٨} + \frac{\pi}{٢}$ ن

أو: ٣θ – θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن ∴ ٢θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٤} + \pi$ ن

∴ الحل العام هو: $\frac{\pi}{٨} + \frac{\pi}{٢}$ ن ، $\frac{\pi}{٤} + \pi$ ن

لإيجاد قيم θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[:

بوضع ن = ٠ ∴ θ = $\frac{\pi}{٨}$ = ٢٢,٥° أ، θ = $\frac{\pi}{٤}$ = ٤٥°

(ب) جتا θ = جا ٥θ ∴ ٥θ ± θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

إما ٥θ + θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن ∴ ٦θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ θ = $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ ن

أو: ٥θ – θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن ∴ ٤θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٨} + \frac{\pi}{٢}$ ن

∴ الحل العام هو: $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ ن ، $\frac{\pi}{٨} + \frac{\pi}{٢}$ ن

لإيجاد قيم θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[:

بوضع ن = ٠ ∴ θ = $\frac{\pi}{١٢}$ = ١٥° أ، θ = $\frac{\pi}{٨}$ = ٢٢,٥°

بوضع ن = ١ ∴ θ = $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ = ٧٥ أ، θ = $\frac{\pi}{٨} + \frac{\pi}{٢}$ = ١١٢,٥ (مرفوض)

∴ θ ∈ { ١٥° ، ٢٢,٥° ، ٧٥° }

(جـ) ∵ ظا ٤θ = ظتا ٢θ ∴ ٤θ + ٢θ = $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن

∴ ٦θ = $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن ∴ θ = $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٦}$ ن

∴ الحل العام هو: $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٦}$ ن

لإيجاد قيم θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[:

عندما ن = ٠ ⇐ θ = ١٥°

عندما ن = ١ ⇐ θ = ٤٥°

عندما ن = ٢ ⇐ θ = ٧٥°

∴ θ ∈ { ١٥° ، ٤٥° ، ٧٥° }

(د) ∵ قتا ٦θ = قا ٣θ ∴ ٦θ ± ٣θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

إما ٦θ + ٣θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن ∴ ٩θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ θ = $\frac{\pi}{١٨} + \frac{٢\pi}{٩}$ ن

أو: ٦θ – ٣θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن ∴ ٣θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢\pi}{٣}$ ن

∴ الحل العام هو: $\frac{\pi}{١٨} + \frac{٢\pi}{٩}$ ن ، $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢\pi}{٣}$ ن

لإيجاد قيم θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[:

عند ن = ٠ ∴ θ = $\frac{\pi}{١٨}$ = ١٠° أ، θ = $\frac{\pi}{٦}$ = ٣٠°

عند ن = ١ ∴ θ = $\frac{\pi}{١٨} + \frac{٢\pi}{٩}$ = ٥٠° أ، θ = $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢\pi}{٣}$ = ١٥٠°

(مرفوض) ، عند ن = ٢ ∴ θ = $\frac{\pi}{١٨} + \frac{٤\pi}{٩}$ = ٩٠° (مرفوض)

∴ θ ∈ { ١٠° ، ٣٠° ، ٥٠° }

تمارين (٥)

(١) المدى = [–١ ، ١]

(٢) المدى = [–٢ ، ٢]

(٣) المدى = [–٣ ، ٣]

(٤) المدى = [–١ ، ١]

(٥) (أ) القيمة العظمى = ٤ ، القيمة الصغرى = –٤

، المدى = [–٤ ، ٤]

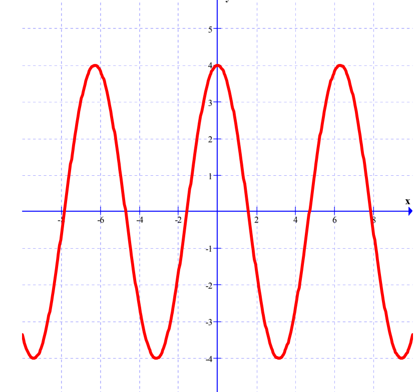
(ب) القيمة العظمى = $\frac{٣}{٢}$ ، القيمة الصغرى = $\frac{-٣}{٢}$

، المدى = [$\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

(٦) المدى = [–٤ ، ٤]

القيمة العظمى = ٤

القيمة الصغرى = –٤



تمارين (٦)

(١) θ = جا⁻١ (٠,٤٣٢٥) = ٢٥,٦٢٦ °

(٢) ∵ ظا θ > ٠ ∴ θ ∈ الربع الأول أو الثالث

، ∵ ٩٠ ° ≤ θ ≤ ٣٦٠ ° ∴ θ ∈ الربع الثالث

الزاوية الحادة التى ظلها = ١,٨ هى ٦٠,٩٤٥ °

∴ θ = ١٨٠ + ٦٠,٩٤٥ = ٢٤٠,٩٤٥ °

(٣) ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ θ ∈ الربع الثانى

الزاوية الحادة التى جيب تمامها ٠,٦ هى ٥٣,١٣ °

∴ θ = ١٨٠ – ٥٣,١٣ = ١٢٦,٨٧ °

(٤) ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ ∈ الربع الثالث

الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ هى ٦٧,٣٨ °

∴ θ = ١٨٠ + ٦٧,٣٨ = ٢٤٧,٣٨ °

(٥) ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ ∈ الربع الثالث

الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ٤٥ °

∴ θ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥ °

(٦) ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ θ ∈ الربع الرابع

الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{٣}{\sqrt{٣٤}}$ هى ٥٩ °

∴ θ = ٣٦٠ – ٥٩ = ٣٠١ °

(٧) ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ ∈ الربع الثالث

الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ هى ٦٣,٤٣٥ °

∴ θ = ١٨٠ + ٦٣,٤٣٥ = ٢٤٣,٤٣٥ °

(٨) الزاوية الحادة التى جيبها $\frac{١}{٣}$ هى ١٩ ٢٨/ °

، ∵ ٩٠ ≤ θ ≤ ١٨٠ ∴ θ = ١٨٠ – ٢٨/ ١٩ ° = ٣٢/ ١٦٠ °

∴ جتا θ = جتا ٣٢/ ١٦٠ ° = – ٠,٩٤٢٨

، ظا θ = ظا ٣٢/ ١٦٠ ° = – ٠,٣٥٣٥

، قا θ = قا ٣٢/ ١٦٠ ° = $\frac{١}{\text{جتا } ٣٢/ ١٦٠°}$ = – ١,٠٦٠٦

حلول الهندسة

تمارين (١)

(١) متشابهان

(٢) محيط الأول : محيط الثانى = ٥ : ١٠ = ١ : ٢

(٣) متشابهان

(٤) متطابقان

(٥) ∵ محيط الأول : محيط الثانى = ٤ : ٩

∴ $\frac{١٦}{\text{محيط الثانى}} = \frac{٤}{٩}$ ∴ محيط الثانى = $\frac{١٦ \times ٩}{٤}$ = ٣٦ سم

(٦) يتشابه المضلعان إذا كان :

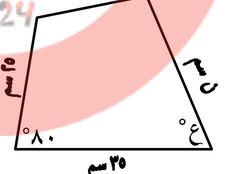
(١) أطوال اضلاعهما المتناظرة متناسبة

(٢) زواياهما المتناظرة متطابقة

(٧) المعين أب جـ ء ~ ص س ل ع ، معامل التشابه = $\frac{\text{أب}}{\text{ص س}} = \frac{١٠}{٧}$

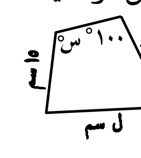
، △ أب جـ ~ △ هـ ء و ، معامل التشابه = $\frac{\text{أب}}{\text{هـ ء}} = \frac{٤,٩}{٨,٤} = \frac{٧}{١٢}$

(٨) فى هذا السؤال لم يعطينا اسماء المضلعات المتشابهة حتى نتمكن من كتابة التناسب بين الأضلاع ولذلك سنلجأ إلى حقيقة أن التشابه هو تكبير أو تصغير لنفس الشكل ونعيد رسم الأشكال بنفس الوضعية .



شكل (٣)

شكل (٢)



شكل (١)

بالنسبة للزوايا :

ص = ١٠٠ ، س = ١١٠ ⇐ ع = ٣٦٠ − (١٠٠ + ١١٠ + ٨٠) = ٧٠

بالنسبة للأضلاع : نفرض طول الضلع المشار إليه = ك سم

∵ شكل (١) ~ شكل (٢) ∴ $\frac{١٨}{٢٤} = \frac{١٥}{ك}$ ∴ ك = $\frac{١٥ \times ٢٤}{١٨}$ = ٢٠

(هذا الضلع هو الوسيط بين الشكال الثلاثة)

، ∵ شكل (٢) ~ شكل (٣) ∴ $\frac{٢٠}{٢٥} = \frac{م}{٣٥} = \frac{٢٤}{ن}$

∴ م = $\frac{٣٥ \times ٢٠}{٢٥}$ = ٢٨ سم ، ن = $\frac{٢٥ \times ٢٤}{٢٠}$ = ٣٠ سم

، ∵ شكل (١) ~ شكل (٢) ∴ $\frac{ل}{٢٨} = \frac{١٨}{٢٤}$ ∴ ل = $\frac{١٨ \times ٢٨}{٢٤}$ = ٢١

(٩) ∵ المضلع أب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أء}}{\text{ل س}}$ ∴ $\frac{٣٢}{٣م - ١} = \frac{٤٠}{٣م + ١}$

∴ ٤٠ (٣م − ١) = ٣٢ (٣م + ١)

∴ ٥ (٣م − ١) = ٤ (٣م + ١)

∴ ١٥م − ٥ = ١٢م + ٤ ∴ ١٥م − ١٢م = ٤ + ٥

∴ ٣م = ٩ ⇐ م = ٣

(١٠) محيط المستطيل الأول = (١٠ + ٦) × ٢ = ٣٢ سم

، مساحة الأول = ١٠ × ٦ = ٦٠ سم²

(أ) المستطيل المطلوب هو تكبير للمستطيل المعطى

∴ $\frac{\text{محيط الثانى}}{٣٢}$ = ٣ ∴ محيط الثانى = ٣٢ × ٣ = ٩٦ سم

، $\frac{\text{مساحة الثانى}}{٦٠}$ = (٣)²

∴ مساحة الثانى = ٦٠ × ٩ = ٥٤٠ سم²

(ب) المستطيل المطلوب هو تصغير للمستطيل المعطى

∴ $\frac{\text{محيط الثانى}}{٣٢}$ = ٠,٤

∴ محيط الثانى = ٣٢ × ٠,٤ = ١٢,٨ سم

، $\frac{\text{مساحة الثانى}}{٦٠}$ = (٠,٤)²

∴ مساحة الثانى = ٦٠ × ٠,١٦ = ٩,٦ سم²

(١١) محيط الأول = (٨ + ١٢) × ٢ = ٤٠ سم

∵ الثانى هو تكبير للأول لأن محيطه أكبر

∴ $\frac{\text{محيط الثانى}}{\text{محيط الأول}} = \frac{٢٠٠}{٤٠}$ = ٥ ∴ نسبة التكبير = ٥

∴ بعدا المستطيل المطلوب = ٨ × ٥ = ٤٠ سم ، ١٢ × ٥ = ٦٠ سم

∴ مساحة المستطيل المطلوب = ٤٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠ سم²

تمارين (٢)

(١) (١) △ أب جـ ~ △ ء أ جـ ~ △ ء ب أ

(٢) $\frac{س}{ع} = \frac{م}{س}$ (٣) $\frac{س}{ع} = \frac{ل}{ص}$

(٤) $\frac{م}{ل} = \frac{س}{ص}$ (٥) $\frac{ل}{ن} = \frac{م}{ل}$

(٦) $\frac{س}{ع} = \frac{م}{س}$ (٧) $\frac{ع}{ص} = \frac{ص}{ن}$

(٨) $\frac{ل}{س} = \frac{ص}{ع}$ (٩) $\frac{ل}{س} = \frac{ن}{ص}$

(٢) شكل (١) : ∵ △ أء ب ~ △ جـ ء أ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ء أ}}$

∴ $\frac{٨}{س} = \frac{٥}{٨}$ ⇐ س = $\frac{٨ \times ٨}{٥}$ = ١٢,٨ متر

شكل (٢) : ∵ △ أب جـ ~ △ ء ب أ ~ △ ء أ جـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أب}}$ ∴ $\frac{ص}{٩} = \frac{٢٥}{ص}$ ⇐ ص² = ٩ × ٢٥

∴ ص = ٣ × ٥ = ١٥ سم

، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ء جـ}}$ ∴ $\frac{٢٥}{س} = \frac{س}{١٦}$ ⇐ س = ٤ × ٥ = ٢٠ سم

شكل (٣) : ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ △ أء هـ ~ △ أب جـ

∴ $\frac{أهـ}{أجـ}=\frac{ءهـ}{بجـ}$ ∴ $\frac{س}{س+٩}=\frac{١٢}{١٥}=\frac{٤}{٥}$ ⇐ ٥ س = ٤ س + ٣٦

∴ ٥ س − ٤ س = ٣٦ ⇐ س = ٣٦ سم

شكل (٤) : ∵ ∠ب = ∠س ، ∠ءوجـ = ∠هـوب

∴ △ ءجـو ∼ △ بهـو ∴ $\frac{ءجـ}{بهـ}=\frac{جـو}{هـو}=\frac{ءو}{بو}$

∴ $\frac{س}{٦}=\frac{٢}{ص}=\frac{٣}{٦}$ ⇐ س = ٣ ، ص = ٤

، ∵ ∠ب = ∠س ، ∠أ مشتركة

∴ △ أبجـ ∼ △ أءهـ ∴ $\frac{بجـ}{ءهـ}=\frac{أجـ}{أهـ}$

∴ $\frac{٨}{ص+٣}=\frac{٩,٦}{ع}$ ∴ $\frac{٨}{٧}=\frac{٩,٦}{ع}$ ⇐ ع = $\frac{٩,٦\times٧}{٨}$ = ٨,٤ سم

(٣) ∵ △ أبجـ ، ءهـو متشابهان

∴ ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{هـ}$) ، ق($\hat{جـ}$) = ق($\hat{و}$)

△ △ أب س ، ءهـ ص متشابهان لأنهما قائما الزاوية

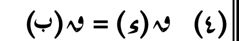
+ ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{هـ}$) ∴ $\frac{ب س}{هـ ص}=\frac{أس}{ءص}$ .... (١)

، △ △ أس جـ ، ءص و متشابهان لأنهما قائما الزاوية

+ ق($\hat{جـ}$) = ق($\hat{و}$) ∴ $\frac{س جـ}{ص و}=\frac{أس}{ءص}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\frac{ب س}{هـ ص}=\frac{س جـ}{ص و}$ ⇐ ب س × ص و = س جـ × هـ ص

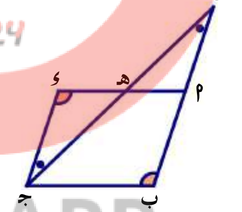


(٤) ق(ء) = ق(ب)

من خواص متوازي الأضلاع .

، ق(ء جـ هـ) = ق(و) بالتبادل

∴ △ ءجـهـ ∼ △ وبجـ .



(٥) ∵ الشكل أبجـء رباعي دائري ، ∠ب خارجة عنه

∴ ق($\widehat{جـبهـ}$) = ق($\hat{ء}$) ، ∠هـ مشتركة

∴ △ أءهـ ∼ △ جـبهـ ∴ $\frac{ءهـ}{بهـ}=\frac{أهـ}{جـهـ}$ ∴ $\frac{٧+جـهـ}{٦}=\frac{١٠}{جـهـ}$

∴ ٧ (جـهـ) + (جـهـ)^2 = ٦٠ بفرض جـهـ = س

∴ س^2 + ٧ س − ٦٠ = ٠ ∴ (س + ١٢) (س − ٥) = ٠

∴ س = ٥ والآخر مرفوض ∴ جـهـ = ٥ سم

(٦) △ △ أبجـ ، أهـء

فيهما : ق($\widehat{بأجـ}$) = ق($\widehat{ءأهـ}$)

، $\frac{أب}{أجـ}=\frac{٤}{٣}$

، $\frac{أهـ}{أء}=\frac{٦}{٤,٥}=\frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{أب}{أجـ}=\frac{٦}{٤,٥}$ ∴ △ أبجـ ∼ △ أهـء وينتج أن :

ق($\widehat{أبجـ}$) = ق($\widehat{أءهـ}$) وهما مرسومتان على $\overline{بجـ}$ وفي جهة

واحدة منها ∴ الشكل بجـءهـ رباعي دائري .

تمارين (٣)

(١) $\frac{م(△ءهـو)}{م(△أبجـ)}=(\frac{ءهـ}{أب})^2=(\frac{١}{٣})^2=\frac{١}{٩}$

(٢) ∵ $\frac{م(△س ص ع)}{م(△أبجـ)}=\frac{١}{٩}=(\frac{س ص}{أب})^2$ ∴ $(\frac{س ص}{أب})^2=(\frac{١}{٣})^2$

∴ $\frac{س ص}{أب}=\frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٤}{أب}=\frac{١}{٣}$ ⇐ أب = ١٢ سم

(٣) ∵ ق($\widehat{أهـجـ}$) = ق($\widehat{ءهـب}$) بالتقابل بالرأس

، ق($\hat{جـ}$) = ق($\hat{ب}$) معطى ∴ △ ءبهـ ∼ △ أجـهـ

∴ $\frac{م(△ءبهـ)}{م(△أجـهـ)}=(\frac{بهـ}{جـهـ})^2$ ∴ $\frac{م(△ءبهـ)}{٩٠٠}=(\frac{٦}{٥})^2=\frac{٣٦}{٢٥}$

⇐ م(△ءهـب) = $\frac{٣٦\times٩٠٠}{٢٥}$ = ١٢٩٦ سم^2

(٤) (بجـ)^2 = (٤ك)^2 + (٣ك)^2 = ٢٥ك^2 ⇐ بجـ = ٥ك

، ∵ ق($\hat{أ}$) = ٩٠ ، $\overline{أء}\perp\overline{بجـ}$

∴ △ أبجـ ∼ △ ءأجـ ∴ $\frac{م(△أبجـ)}{م(△ءأجـ)}=(\frac{بجـ}{أجـ})^2=(\frac{٥ك}{٣ك})^2$

∴ $\frac{م(△أبجـ)}{١٨٠}=\frac{٢٥}{٩}$ ∴ م(△أبجـ) = $\frac{١٨٠\times٢٥}{٩}$ = ٥٠٠ سم^2

(٥) ∵ $\frac{محيط الأصغر}{محيط الأكبر}=\frac{٢}{٥}$ ∴ $\frac{مساحة الأصغر}{مساحة الأكبر}=\frac{٤}{٢٥}$

∴ نفرض مساحة الأصغر = ٤ س ، مساحة الأكبر = ٢٥ س

، ∵ مجموع المساحتين = ٢٦١ ∴ ٤ س + ٢٥ س = ٢٦١

∴ ٢٩ س = ٢٦١ ⇐ س = ٩

∴ مساحة الأصغر = ٤ × ٩ = ٣٦ سم^2

(٦) ∵ $\frac{مساحة الأصغر}{مساحة الأكبر}=(\frac{٢}{٣})^2$

∴ $\frac{١٨}{مساحة الأكبر}=\frac{٤}{٩}$

⇐ مساحة المضلع الأكبر = $\frac{٩\times١٨}{٤}$ = ٤٠,٥ سم^2

(٧) النسبة بين مساحتيهما = (٣)^2 : (٤)^2 = ٩ : ١٦

(٨) النسبة بين محيطيهما = $\sqrt{٣}$: $\sqrt{٤}$ = $\sqrt{٣}$: ٢

(٩) ∵ $\frac{محيط الأصغر}{محيط الأكبر}=\frac{٤}{٩}$ ∴ $\frac{١٢}{محيط الأكبر}=\frac{٤}{٩}$

⇐ محيط الأكبر (الثاني) = $\frac{٩\times١٢}{٤}$ = ٢٧ سم

(١٠) ∵ معامل التشابه = ٢ > ١ ∴ المستطيل المطلوب هو تكبير

∴ بعدى المستطيل المطلوب هما ٨ سم ، ٦ سم

∴ مساحة المستطيل = ٨ × ٦ = ٤٨ سم^2

(١١) ∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ∴ △ أءهـ ∼ △ أبجـ

∴ $\frac{م(\triangle أهء)}{م(\triangle أبج)} = (\frac{أء}{أب})^2$ ∴ $\frac{٦٠}{م(\triangle أبج)} = (\frac{٢}{٣})^2 = \frac{٤}{٩}$

∴ م(Δ أ ب ج) = $\frac{٦٠ \times ٩}{٤}$ = ١٣٥ سم²

مساحة شبه المنحرف ء ب ج هـ = م(Δ أ ب ج) − م(Δ أ ء هـ)

= ١٣٥ − ٦٠ = ٧٥ سم²

(١٢) ق(جَ) = ق(أَ) من خواص متوازى الأضلاع

، ق(وَ) = ق(أءهـ) ∴ Δ ء ج و ~ Δ هـ أ ء

∴ $\frac{م(\triangle ءجو)}{م(\triangle هـأء)} = (\frac{ءج}{أهـ})^2 = (\frac{أب}{أهـ})^2 = (\frac{٥}{٣})^2 = \frac{٢٥}{٩}$

(١٣) ∵ ٢أب = ٣أج ∴ $\frac{أب}{أج} = \frac{٣}{٢}$

∵ أء مماس للدائرة ∴ ق(أءج) = ق(بَ)

، ∠ء مشتركة ∴ Δ ء أ ج ~ Δ ء ب أ

∴ $\frac{م(\triangle ءأج)}{م(\triangle ءبأ)} = (\frac{أج}{أب})^2 = (\frac{٢}{٣})^2 = \frac{٤}{٩}$

بفرض أن م(Δ ء أ ج) = ٤ س ، م(Δ ء ب أ) = ٩ س

⇐ م(Δ أ ج ب) = م(Δ ء ب أ) − م(Δ ء أ ج)

= ٩ س − ٤ س = ٥ س

∴ $\frac{م(\triangle ءأج)}{م(\triangle بأج)} = \frac{٤س}{٥س} = \frac{٤}{٥}$

أو: ∵ $\frac{م(\triangle ءأج)}{م(\triangle ءبأ)} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{م(\triangle ءأج)}{م(\triangle ءبأ) - م(\triangle ءأج)} = \frac{٤}{٩-٤} = \frac{٤}{٥}$

تمارين (٤)

(١) ∵ هـ منتصف أب ∴ هـأ = هـب = ½ أب = ٦ سم

، ∵ أب ∩ جء = {هـ} ∴ هـأ × هـب = هـج × هـء

∴ ٦ × ٦ = ٤ × هـء ⇐ هـء = ٩ سم

(٢) ∵ أء مماس ∴ (أء)² = أب × أج

∴ ١٤٤ = أب(أب + ١٠) ∴ (أب)² + ١٠ أب − ١٤٤ = ٠

∴ (أب + ١٨)(أب − ٨) = ٠ ∴ أب = ٨ سم والآخر مرفوض

⇐ أج = ٨ + ١٠ = ١٨ سم

(٣) ءأ × ءج = ءب × ءهـ (أ)

(٤) ∵ أء مماس ∴ (أء)² = أب × أج

∴ ٢٢٥ = ٩(٩ + ب ج) ∴ ٢٥ = ٩ + ٢ نق ∴ ٢ نق = ١٦

∴ طول قطر الدائرة = ١٦ سم

(٥) ∵ أب مماس ∴ (أب)² = أء × أو = أج × أهـ = ٣ × ١٢

= ٣٦ ∴ أب = ٦ سم

(٦) العبارة الخاطئة هى العبارة الأخيرة (ء)

(٧) ∵ أج ∩ أهـ = {أ} ∴ أب × أج = أء × أهـ

∴ ٣ × ١٦ = ٤(٤ + أهـ) ∴ ١٢ = ٤ + أهـ

⇐ أهـ = ٨ ∴ ءهـ = ٨ − ٤ = ٤ سم

(٨) شكل (١):

∵ أب ∩ جء = {هـ} ∴ هـأ × هـب = هـج × هـء

∴ ٣ س × ٤ س = ٦ × ١٨ ∴ س² = ٩ ⇐ س = ٣

شكل (٢):

∵ أج ∩ أهـ = {أ} ∴ أب × أج = أء × أهـ

∴ س × (س + ٣ س) = ٨ × (٨ + س + ٤)

∴ س × ٤ س = ٨ × (س + ١٢) ∴ س² = ٢ س + ٢٤

∴ س² − ٢ س − ١٢ = ٠

وباستخدام الآلة الحاسبة ∴ س = ٤,٦ سم

شكل (٣):

∵ أء مماس ∴ (أء)² = أب × ب ج ∴ ٦٤ = س × ٢ س

∴ ٣٢ = س² ⇐ س = ٤$\sqrt{٢}$ سم

شكل (٤): نرسم جهـ يقطع الدائرة فى هـ

Δ ج أ م متساوى الساقين

∴ م ء = ٦ سم ، ج أ = ٩ سم ، م هـ = ٦ سم

∵ جهـ ∩ جأ = {ج} ∴ جء × جهـ = جب × جأ

∴ ٣ × ١٥ = س × ٩ ⇐ س = ٥ سم

(٩) شكل (١):

(أب)² = ١٦ ، أء × أج = ٢ × ٨ = ١٦

∴ (أب)² = أء × أج ⇐ أب مماس للدائرة: ب، ج، ء

شكل (٢):

∵ ق(أَ) = ٩٠ ∴ (أب)² = ($\sqrt{٢٩}$)² − (٥)² = ٢٩ − ٢٥ = ٤

، أء × أج = ١ × ٥ = ٥ ∴ (أب)² ≠ أء × أج

∴ أب ليس مماساً للدائرة: ب، ج، ء

(١٠) شكل (١):

∵ أب ∩ جء = {هـ} ، هـأ × هـب = ٦ × ٧ = ٤٢

، جهـ × هـء = ٥ × ٨.٤ = ٤٢ ∴ هـأ × هـب = جهـ × هـء

⇐ النقط أ ، ب، ج، ء تقع على دائرة واحدة.

شكل (٢):

هـج × هـب = ٤ × ١٠ = ٤٠ ، هـء × هـأ = ٥ × ٨ = ٤٠

∴ هـ جـ × هـ ا = هـ ء × هـ ب حيث ب هـ ∩ هـ ا = {هـ}

∴ النقط ا ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة .

(١١) ∵ اب مماس للدائرة م ∴ (اب)² = ا و × ا هـ = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ اب = ٦ سم .... (١)

، ∵ اجـ مماس للدائرة ن ∴ (اجـ)² = ا هـ × ا ء = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ اجـ = ١٢ سم .... (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ اب = ١/٢ اجـ ⇐ ب منتصف اجـ

(١٢) ا هـ = ٥/١٢ × ٦ = ٢,٥ سم ، هـ ء = ٣/٥ × ٥ = ٣ سم

، ا هـ × هـ ب = ٢,٥ × ٦ = ١٥ ، جـ هـ × هـ ء = ٥ × ٣ = ١٥

∴ ا هـ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء ⇐ النقط ا ، ب ، جـ ، ء ∈ دائرة واحدة

(١٣) فى الدائرة الصغرى :

∵ اجـ ∩ ا و = {ا}

∴ اب × اجـ = ا هـ × ا و = ٥ × ١٩ = ٩٥

، ∵ اب = جـ ء ∴ اجـ = ب ء

∴ اب × ب ء = ٩٥

تمارين (٥)

(١) با/ءب = ٨/٣ ، جـهـ/هـا = ٣/٥

(٢) جـهـ/هـا = ٣/٧ ، ب ء/با = ٣/٧

(٣) شكل (١) :

∵ ءهـ // بجـ ∴ اء/ءب = اهـ/هـجـ ∴ ٦/٣ = ٩/س ∴ س = ٤,٥ سم

شكل (٢) :

∵ ءهـ // بجـ ∴ اء/ءب = اهـ/هـجـ ∴ ٨/س = (س + ٢)/٣

∴ س² + ٢ س = ٢٤ ∴ س² + ٢ س − ٢٤ = ٠

وباستخدام الآلة الحاسبة ∴ س = ٦ سم

شكل (٣) :

∵ ءهـ // بجـ ∴ اجـ/هـجـ = اب/ءب ∴ ٢٤/س = ٢٧/٣٦ ⇐ س = ٣٢ سم

شكل (٤) :

∵ ءهـ // بجـ ∴ اء/ءب = اهـ/هـجـ ∴ ٧/(٢س + ١) = (س + ٢)/٥

∴ (٢ س + ١) (س + ٢) = ٣٥

∴ ٢ س² + ٤ س + س + ٢ − ٣٥ = ٠ ∴ ٢ س² + ٥ س − ٣٣ = ٠

بالتحليل أو باستخدام الآلة الحاسبة ⇐ س = ٣

(٤) شكل (١) :

اس/سب = ١٢/٨ = ٣/٢ ، اص/صجـ = ١٨/١٢ = ٣/٢ ⇐ اس/سب = اص/صجـ

∴ سص // بجـ

شكل (٢) :

Δ اص س قائم الزاوية ∴ (اس)² = (١٥)² + (٢٠)² ∴ اس = ٢٥

، اص/صجـ = ١٥/٩ = ٥/٣ ، اس/سب = ٢٥/١٥ = ٥/٣ ∴ اص/صجـ = اس/سب

⇐ سص // بجـ

(٥) ∵ بجـ // ءهـ ∴ اجـ/اهـ = اب/اء ∴ ٥/اهـ = ٦/١٢

∴ ا هـ = ١٠ سم

، ∵ سص // ءهـ ∴ اء/سء = اهـ/صهـ ∴ ١٢/ءس = ١٠/٤

∴ ءس = (١٢ × ٤)/١٠ = ٨,٤ سم

(٦) فى Δ ابجـ : ∵ سص // بجـ ∴ اس/سب = اص/صجـ .... (١)

، فى Δ اجـء ∵ صع // جـء ∴ اع/عء = اص/صجـ .... (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ اس/سب = اع/عء ⇐ سع // بء

(٧) فى Δ ابء : ∵ مهـ // اء ∴ بهـ/هـا = بم/مء .... (١)

، فى Δ بجـء : ∵ مو // ءجـ ∴ بو/وجـ = بم/مء .... (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ بهـ/هـا = بو/وجـ ⇐ هـو // اجـ

(٨) فى Δ ابجـ : ∵ ءهـ // اب ∴ جـهـ/جـب = جـء/جـا .... (١)

، فى Δ اجـهـ : ∵ ءو // اهـ ∴ جـو/جـهـ = جـء/جـا .... (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ جـهـ/جـب = جـو/جـهـ ⇐ (جـهـ)² = جـو × جـب

(٩) اء/اب = ٥,٦/١٤ = ٢/٥ .... (١)

، اهـ/اجـ = ٨,٤/٢١ = ٢/٥ .... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ اء/اب = اهـ/اجـ

⇐ ءهـ // بجـ

(١٠) (١) ∵ ءهـ // بجـ ∴ أء/ءب = أهـ/هـجـ ∴ ٤/٨ = أهـ/٦

∴ أهـ = (٤ × ٦)/٨ = ٣

(٢) ∵ ٢ ءب = ١٢ ∴ ءب = ٦ ، ∵ ٣ وجـ = ١٢ ∴ وجـ = ٤

، ∵ ءو // أجـ ∴ بء/ءأ = بو/وجـ ∴ ٦/س = (س + ٥)/٤

∴ س² + ٥ س − ٢٤ = ٠ ⇐ س = ٣

تمارين (٦)

(١) ∵ أء // هـو // جـب ∴ ءهـ/هـجـ = أو/وب ∴ ءهـ/٢٠ = ٣٣/١٥

∴ ءهـ = (٢٠ × ٣٣)/١٥ = ٤٤ سم

(٢) ∵ مأ = أب = بجـ = جـء ∴ مأ/مء = ١/٤

∵ أأ' // بب' // جـجـ' // ءء' ∴ △ مأأ' ~ △ مءء'

∴ أأ'/ءء' = مأ/مء ∴ أأ'/٤٨ = ١/٤ ∴ أأ' = ١٢ سم

(٣) ∵ المستقيمات متوازية وأجزاء أحد القاطعين متساوية

∴ أجزاء القاطع الآخر متساوية أيضاً ∴ ٢ س − ٣ = س + ٢

⇐ س = ٥ ، ∵ ص + ٣ = س + ١ ∴ ص = ٥ + ١ − ٣ = ٣

(٤) ∵ أب // جـء ∴ أم/أء = بم/بجـ ∴ أم × بجـ = بم × أء

(٥) شكل (١): من التوازى ∴ (٢س − ٣)/٤ = ٨/(٣س + ١)

∴ (٢س − ٣)(٣س + ١) = ٣٢ ∴ ٦س² − ٧س − ٣ − ٣٢ = ٠

∴ ٦س² − ٧س − ٣٥ = ٠ وباستخدام الآلة الحاسبة س = ٣

شكل (٢): من التوازى ∴ (٤س − ١)/(٣س − ٢) = ٣س/٢س ∴ (٤س − ١)/(٣س − ٢) = ٣/٢

∴ ٩س − ٦ = ٨س − ٢ ⇐ س = ٤

شكل (٣): من التوازى ∴ س² − ٣ = ٣س + ١

∴ س² − ٣س − ٤ = ٠ ⇐ س = ٤

، ٢ص − ١ = ٣س + ١ ∴ ٢ص = ٣ × ٤ + ١ + ١ = ١٤

∴ ص = ٧

شكل (٤): من التوازى ∴ ٣س − ١ = ٢س + ٣ ∴ س = ٤

، ٢ص + ٧ = ٣س + ١ ∴ ٢ص = ٣ × ٤ + ١ − ٧ = ٦

∴ ص = ٣

(٦) فى △ أءجـ :

∵ س ، ص منتصفى ءأ ، ءجـ

∴ س ص // أجـ

، ص س = ١/٢ أجـ ..... (١)

، فى △ أبجـ :

∵ هـ ، و منتصفى أب ، بجـ

∴ هـو // أجـ ، هـو = ١/٢ أجـ .... (٢)

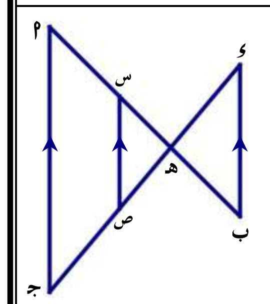
من (١) ، (٢) : ∴ ص س // هـو ، ص س = هـو

∴ الشكل هـ و س ص متوازى أضلاع .

(٧) ∵ س ص // ءب // أجـ

∴ أس/جـص = هـب/ءهـ

⇐ أس × ءهـ = جـص × هـب



تمارين (٧)

(١) (أ) بء/ءجـ = بأ/أجـ (ب) جـأ/بأ = جـء/بء

(جـ) بء/بأ = جـء/أجـ (ء) أب × جـء = أجـ × بء

(٢) متعامدان

(٣) موازياً

(٤) بء > ءجـ

(٥) ∵ بء ينصف ∠ ب ∴ بأ/بجـ = ءأ/ءجـ ∴ ٨/١٠ = (س + ٣)/١٧,٥

∴ ١٠ س + ٣٠ = ٨ × ١٧,٥ ∴ ١٠ س = ١١٠ ⇐ س = ١١

(٦) ∵ أء ينصف ∠ أ الخارجة ∴ أب/أجـ = ءب/ءجـ

∴ (٥س + ٢)/٩ = ٢٠/١٥ = ٤/٣ ∴ ١٥ س + ٦ = ٣٦ ∴ ١٥ س = ٣٠

∴ س = ٢

، ص² = ءب × ءجـ − أب × أجـ = ٢٠ × ١٥ − ١٢ × ٩ = ١٩٢

∴ ص = √١٩٢ = ٨√٣

(٧) ∵ ∠ ب = ∠ جـ ∴ أب = أجـ = ٧ ، س = ٤

(من خواص المثلث المتساوى الساقين)

، ص² = أب × أجـ − بء × ءجـ = ٧ × ٧ − ٤ × ٤ = ٣٣

∴ ص = √٣٣

(٨) △ أءجـ القائم : (ءجـ)² = (٥٠)² − (٣٠)² = ١٦٠٠

∴ ءجـ = ٤٠ ، ∵ أب ينصف ∠ أ ∴ أء/أجـ = بء/بجـ

∴ ٣٠/٥٠ = (٤٠ − س)/س ∴ ٣ س = ٢٠٠ − ٥ س ∴ ٨ س = ٢٠٠

∴ س = ٢٥ ∴ بء = ٤٠ − ٢٥ = ١٥

، ص² = ٣٠ × ٥٠ − ١٥ × ٢٥ = ١١٢٥ ∴ ص = ١٥√٥

(٩) في △ أ ء جـ :

∵ ءص ينصف ∠ ء ∴ أص/صجـ = أء/ءجـ = ٦/٩ = ٢/٣

ولكن أس/سب = ٤/٦ = ٢/٣ ∴ أس/سب = أص/صجـ ⇐ سص // بجـ

(١٠) في △ أ ء جـ : ∵ ءس ينصف ∠ ء ∴ أس/سجـ = أء/ءجـ = أء/ءب

، في △ أ ء ب : ∵ ءص ينصف ∠ ء ∴ أص/صب = أء/ءب

∴ أس/سجـ = أص/صب ⇐ سص // بجـ

(١١) في △ أ ء ب : ∵ ءس ينصف ∠ ء ∴ أس/سب = أء/ءب

، في △ أ ء جـ : بم ءص ينصف ∠ ء ∴ أص/صجـ = أء/ءجـ = أء/ءب

∴ أس/سب = أص/صجـ ⇐ سص // بجـ

(١٢) ∵ أء ينصف ∠ أ ∴ أب/أجـ = بء/ءجـ

∴ ٢٧/١٥ = ١٨/ءجـ

∴ ءجـ = ١٨ × ١٥ / ٢٧ = ١٠

∵ أء ينصف ∠ أ من الداخل

∴ (أء)² = أب × أجـ − بء × ءجـ

= ٢٧ × ١٥ − ١٨ × ١٠ = ٢٢٥ ∴ أء = √٢٢٥ = ١٥ سم

(١٣) ∵ أء ، أهـ المنصفان الداخلي والخارجي لـ أ

∴ بء/ءجـ = بهـ/جـهـ = أب/أجـ = ٨/٦ = ٤/٣

بفرض ءجـ = س سم

، جـهـ = ص سم

∴ بء/ءجـ = (٦ − س)/س = ٤/٣ ∴ ٤ س = ١٨ − ٣ س ⇐ س = ٢,٦ سم

∴ ءجـ = ٢,٦ سم ، بء = ٦ − ٢,٦ = ٣,٤ سم

، بهـ/جـهـ = (ص + ٦)/ص = ٤/٣ ∴ ٤ ص = ٣ ص + ١٨ ⇐ ص = ١٨ سم

∴ هـجـ = ١٨ سم ⇐ هـء = ١٨ + ءجـ = ١٨ + ٢,٦ = ٢٠,٦ سم

، (أء)² = أب × أجـ − بء × ءجـ = ٨ × ٤ − ٣,٤ × ٢,٦ = ٢٣,١٦

∴ أء = √٢٣,١٦ = ٤,٨ سم

، (أهـ)² = هـب × هـجـ − أب × أجـ = ٢٤ × ١٨ − ٨ × ٤ = ٤٠٠

∴ أهـ = √٤٠٠ = ٢٠ سم

(١٤) ∵ جـهـ // أء

∴ ءجـ/جـب = أب/جـب = أهـ/هـب .... (١)

، ∵ هـو // بجـ

∴ أو/وجـ = أهـ/هـب .... (٢)

من (١)، (٢) :

∴ بأ/بجـ = أو/وجـ ⇐ بو ينصف ∠ أبجـ .

تمارين (٨)

(١) (أ) ∵ ىم(أ) = −٣٦ < ٠ ⇐ أ ∈ داخل الدائرة

(ب) ∵ ىم(أ) = ٩٦ > ٠ ⇐ أ ∈ خارج الدائرة

(جـ) ∵ ىم(أ) = ٠ ⇐ أ ∈ الدائرة

(٢) ىم(أ) = (م أ)² − نق² = ١٤٤ − ٨١ = ٦٣

(٣) ىم(ء) = (م ء)² − نق² = ١٧ − ١٦ = ١

(٤) ∵ ىم(أ) = ٤٠٠ ∴ (م أ)² − نق² = ٤٠٠

∴ (٢٥)² − نق² = ٤٠٠ ∴ نق² = ٦٢٥ − ٤٠٠ = ٢٢٥

∴ نق = ١٥ سم

(٥) ∵ النقطة أ ∈ داخل الدائرة

∴ ىم(أ) = − أب × أجـ

∴ (م أ)² − نق² = − ٢ أجـ × أجـ

∴ (١٦)² − (٢٠)² = − ٢ (أجـ)² ∴ − ١٤٤ = − ٢ (أجـ)²

∴ (أجـ)² = ٧٢ ∴ أجـ = √٧٢ = ٦√٢

∴ بجـ = ٣ × ٦√٢ = ١٨√٢ = ٢٥,٥ سم تقريباً

(٦) (أ) ∵ ىم(أ) = ىن(أ) = ٠ (لأن أ ∈ الدائرتين)

، ىم(ب) = ىن(ب) = ٠ (لأن ب ∈ الدائرتين)

∴ أب محور أساسي للدائرتين م ، ن .

(ب) ∵ ىم(أ) = ١٤٤ ∴ س ء × س جـ = ١٤٤

∴ ٢ ءجـ × ٣ ءجـ = ١٤٤ ∴ ٦ ءجـ = ١٤٤ ⇐ ءجـ = ٢٤ سم

∴ س جـ = ٣ × ٢٤ = ٧٢ سم

، س و × س هـ = ١٤٤ ∴ س و × (س و + ١٠) = ١٤٤

∴ (س و)² + ١٠ (س و) − ١٤٤ = ٠ ⇐ س و = ٨ سم

(جـ) ∵ س ء × س جـ = س و × س هـ

∴ النقط جـ ، ء ، و ، هـ تقع على دائرة واحدة .

أى أن الشكل جـ ء و هـ رباعي دائري .

(٧) شكل (١) :

∵ ٩٠° = ١/٢ (٧ ص + ١١ ص)

∴ ١٨٠° = ١٨ ص° ⇐ ص° = ١٠°

شكل (٢) :

∵ ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ (ص − ٤٠) ∴ ٦٠° = ص° − ٤٠ ⟸ ص° = ١٠٠°

شكل (٣) :

∵ ٥٠° = $\frac{١}{٢}$ [١٤٥ − (٢ س − ٥)] ∴ ١٠٠° = ١٤٥ − ٢ س + ٥

∴ ٢ س = ١٥٠ − ١٠٠ ∴ ٢ س = ٥٠ ⟸ س° = ٢٥°

شكل (٤) :

∵ ٦٥° = $\frac{١}{٢}$ (٣ س + ٥ − ٥٥) ∴ ١٣٠ + ٥٠ = ٣ س

∴ ٣ س = ١٨٠ ∴ س° = ٦٠°

شكل (٥) :

∵ ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ [(٢ س + ١٠) − (س − ٥)]

∴ ٩٠° = ٢ س + ١٠ − س + ٥ ∴ ٩٠° = س + ١٥ ∴ س° = ٧٥°

شكل (٦) :

∵ ٣ س + ٥ = ٣٦٠ − ١٣٠ ∴ ٣ س = ٢٣٠ − ٥ = ٢٢٥

∴ س° = ٧٥°

، ∵ ع° = $\frac{١}{٢}$ [(٣ × ٧٥ + ٥) − ١٣٠]

∴ ع° = $\frac{١}{٢}$ (٢٣٠ − ١٣٠) = ٥٠°

---

(٨) ∵ ∠ أ = ٣٣ (محيطية) ∴ ق(⌒بجـ) = ٢ × ٣٣ = ٦٦

(أ) ∵ ٧٠° = $\frac{١}{٢}$ [ق(⌒بجـ) + ق(⌒أس)]

∴ ١٤٠° = ٦٦ + ق(⌒أس) ⟸ ق(⌒أس) = ١٤٠ − ٦٦ = ٧٤°

(ب) ق(⌒س ص) = ٣٦٠ − (١٠٠ + ٦٦ + ٩٤ + ٧٤) = ٢٦°

(جـ) ق(∠هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(⌒بجـ) − ق(⌒س ص)] = $\frac{١}{٢}$ (٦٦ − ٢٦)

= ٤٠°

تم بحمد الله